Fabrice Gerbier

DEA de Physique Quantique 1999-2000

LE LASER A ATOMES:

utilisation d'un condensat de Bose-Einstein de Rubidium comme source cohérente d'ondes de De Broglie

Stage effectué dans le groupe
d'Optique Atomique
de l'Institut d'Optique d'Orsay,
sous la direction de Philippe Bouyer

Résumé

Ce mémoire rend compte du travail effectué au sein du groupe d'Optique Atomique de l'Institut d'Optique d'Orsay. Il porte précisément sur l'étude d'un condensat de Bose-Einstein de Rubidium en tant que "laser à atomes" : on définit ainsi une source atomique spatialement et temporellement cohérente, par analogie avec les lasers optiques. La technique retenue à l'Institut d'Optique consiste à coupler les atomes piégés magnétiquement vers l'espace libre au moyen d'une transition radiofréquence. La densité dans l'espace des phases reste élevée dans le faisceau, si bien qu'il est légitime de parler d'ondes de matière cohérentes. Après une brève présentation des propriétés des gaz d'alcalins condensés, la discussion se focalise sur un modèle approché très simple du coupleur de sortie basé sur l'analogie avec une équation de Schrödinger. L'accord avec une simulation à une dimension des équations de Gross-Pitaevskii couplées régissant le système, ainsi qu'avec les données expérimentales récoltées par le groupe de Münich, est satisfaisant. Plusieurs possibilités d'expériences d'interférences entre ondes de De Broglie sont ensuite présentées, ainsi que le dispositif expérimental et quelques résultats préliminaires.

Table des matières

1 Le condensat de Bose-Einstein : un système cohérent et macroscopique. 6
1.1 Description théorique . . . 6
1.1.1 Condensation d'une assemblée de bosons en interaction . . . 6
1.1.2 Théorie de champ moyen : l'équation de Gross-Pitaevskii . . . 6
1.1.3 Approximation de Thomas-Fermi . . . 7
1.2 Propriétés de cohérence . . . 7
1.2.1 Fonctions de corrélations . . . 7
1.2.2 Phase relative entre deux condensats . . . 8
1.3 Le laser à atomes . . . 9
1.3.1 Analogies avec le laser optique . . . 9
1.3.2 Coupleurs de sortie : différentes méthodes . . . 10

2 Modèle simple du laser à atomes 11
2.1 Problème envisagé . . . 11
2.1.1 Couplage et évolution du condensat . . . 11
2.1.2 Rappels sur l'évolution d'un état discret couplé à un continuum . . . 13
2.2 Modèle 1 D . . . 15
2.2.1 Traitement quantique d'une particule soumise à la gravité . . . 15
2.2.2 Calcul du taux d'extraction . . . 16
2.2.3 Règle d'or de Fermi . . . 17
2.2.4 Discussion de la formule . . . 18
2.2.5 Fonction d'onde du faisceau de sortie . . . 18
2.3 Modèle 3D . . . 19
2.3.1 Calcul du taux d'extraction . . . 19
2.3.2 Comparaison avec l'espace libre . . . 19
2.3.3 Approximation de Born-Markov . . . 20
2.4 Caractéristiques du laser : largeur de raie et dynamique . . . 20
2.5 Interférences entre ondes de matière . . . 23
2.5.1 Expérience de fentes d'Young . . . 24
2.5.2 Battements entre deux lasers indépendants . . . 25

3 Expériences préliminaires avec le laser à atomes 28
3.1 Production du condensat de Bose-Einstein . . . 28
3.1.1 Le pré-refroidissement laser . . . 28
3.1.2 Le refroidissement évaporatif . . . 29
3.2 Présentation du dispositif . . . 29
3.2.1 Vue d'ensemble . . . 29
3.2.2 Le piège à noyaux ferromagnétiques . . . 30
3.3 Le laser à atomes . . . 31
3.3.1 Problèmes de stabilité du champ magnétique . . . 31
3.3.2 Résultats préliminaires . . . 33

A Calcul de l'intégrale de recouvrement **35**
A.1 Calcul du taux de départ à 1D 35
A.2 Calcul du taux de départ à 3D 36

Table des figures

2.1 Principe du laser à atomes 12
2.2 Etat discret couplé à un continuum : les différents régimes 15
2.3 Fonctions d'Airy. 16
2.4 Dynamique du nombre d'atomes piégés 21
2.5 Simulation de la dynamique des fonctions d'ondes 22
2.6 Largeur de raie du laser à atomes 23
2.7 Comparaison avec les données expérimentales 24
2.8 Interférences entre deux lasers extraits par deux radiofréquences 25
2.9 Battements entre deux lasers indépendants 26
2.10 Battements entre deux lasers possédant une relation de phase définie 26

3.1 Dispositif expérimental 30
3.2 Electroaimant 31
3.3 Oscillations du centre de masse du condensat après abaissement du champ magnétique de biais 32
3.4 Images en absorption de lasers à atomes 33

Introduction

La condensation de Bose-Einstein est un phénomène très général en mécanique quantique, prédit dès 1926 par Albert Einstein d'après les travaux du physicien indien Satyendranath Bose. Il s'agit d'une transition de phase que subit un ensemble de bosons porté en dessous d'une certaine température critique T_C : un nombre macroscopique de particules s'accumule alors dans un seul état quantique du système. Les propriétés d'un tel système sont alors sans commune mesure avec le comportement avant la transition. Dans le domaine de la physique de la matière condensée, on lui attribue par exemple la superfluidité de l'hélium liquide, ou bien la supraconductivité, qui s'interprète comme la condensation d'un gaz d'électrons appariés sous forme de "paires de Cooper" bosoniques. Ce dernier phénomène pourrait également s'appliquer au comportement de la matière nucléaire au coeur des étoiles denses. Depuis 1995, on sait former des condensats à partir de gaz d'atomes alcalins refroidis par laser. Ces systèmes apparaissent particulièrement intéressants, car ils présentent des densités plus faibles de plusieurs ordres de grandeurs par rapports à leurs homologues : les interactions entre atomes, difficiles à traiter, y jouent un rôle moins prépondérant et ils sont donc susceptibles d'une description théorique plus fine. De plus, il est plus simple, d'un point de vue expérimental, de contrôler certains paramètres physiques comme le nombre d'atomes ou la densité. La détection, basée sur des méthodes optiques, est également facilitée. Pour ces raisons (et d'autres que nous évoquons plus loin), le groupe d'Optique Atomique de l'Institut d'Optique a décidé de se lancer dans des expériences sur un condensat de Rubidium 87 ([1],[2],[3],[4],[5]). Le condensat a été obtenu en juillet 1998, et se prête maintenant aux expériences d'optique atomique pour lesquelles ce système présente un intérêt indéniable.

Le condensat comme source cohérente pour l'optique atomique

En optique atomique, l'objectif est de transposer les techniques et connaissances relatives aux ondes électromagnétiques aux ondes de matière de De Broglie. La question de la cohérence se pose de manière cruciale, car elle détermine les effets qui vont pouvoir être observés. Par exemple, la fonction de cohérence d'ordre 1 caractérise le contraste des franges d'interférences qui se forment lorsque deux ondes (ondes lumineuses ou ondes de De Broglie) se recouvrent. Pour un gaz de Boltzmann à l'équilibre thermodynamique, elle décroît de 1 à 0 sur une distance caractéristique (la longueur de cohérence) de l'ordre de λ_T, la longueur d'onde de De Broglie thermique, qui détermine donc la dimension de la zone où on pourra observer les franges . Par contre, pour un condensat de Bose, l'ordre à longue distance implique que $G^{(1)}$ tend asymptotiquement vers une limite finie fixée par la fraction d'atomes condensés : $\frac{N_0}{N}$. Cette notion n'est cependant strictement valable qu'à la limite thermodynamique. Pour un système réel de taille finie, on ne peut définir les fonctions de corrélations pour une distance supérieure à la taille du système. Il a été montré expérimentalement par plusieurs méthodes que $G^{(1)}$ tendait bien vers un plateau à longue distance ([6]). La longueur de cohérence du condensat est donc de l'ordre de son extension spatiale, bien supérieure à la longueur d'onde de De Broglie aux températures considérées (pour une revue des expériences concernant les propriétés de cohérence des condensats, voir [7]). Toute expérience mettant en jeu un phénomène d'interférence sera donc bien mieux résolue spatialement et avec un plus grand flux d'atomes. De plus, la prise en compte des interactions entre atomes introduit un terme non linéaire dans les équations d'évolution, ouvrant la voie à l'optique atomique non-linéaire. Des expériences de mélange à quatre ondes de De Broglie ont ainsi été menées récemment au NIST. Finalement, l'enjeu est de disposer d'une source pour l'optique atomique, qui aurait par rapport à une source thermique les mêmes propriétés qu'un laser par rapport à une source lumineuse classique : une directionnalité bien plus grande,

une intensité supérieure et une cohérence spatiale et temporelle aussi idéales que possibles.

Plan du mémoire : Nous nous proposons de décrire une des applications du phénomène de condensation de Bose-Einstein en optique atomique : la réalisation d'un laser à atomes.
Nous traitons très brièvement dans une première partie de propriétés assez générales des condensats : description dans une théorie de champ moyen, propriétés de cohérence. Ensuite nous résumons un certain nombre de résultats traitant de la cohérence relative entre deux condensats, que l'on interprète en terme de phase relative. Nous introduisons enfin l'idée de laser à atomes.
Dans une seconde partie, nous présentons un modèle simplificateur d'un tel laser, qui a l'avantage de permettre un certain nombre de calculs analytiques et d'interprétations physiques : en effet, il permet des rapprochements avec un certain nombre d'effets généraux et bien connus de la mécanique quantique "usuelle". Nous le comparons finalement à une simulation 1D, qui se compare relativement bien à l'expérience ([8]). Nous nous intéressons enfin à divers processus d'interférences entre ondes de matière cohérentes. Dans une troisième partie, sont décrites les techniques expérimentales qui permettent d'atteindre le régime dégénéré. Nous décrivons en particulier l'électroaimant qui constitue le piège magnétique. Après avoir mentionné les difficultés particulières qui se posent pour réaliser un laser à atomes, nous terminons en présentant quelques résultats expérimentaux préliminaires.

Chapitre 1

Le condensat de Bose-Einstein : un système cohérent et macroscopique.

1.1 Description théorique

1.1.1 Condensation d'une assemblée de bosons en interaction

L'exemple standard pour introduire le phénomène de condensation de Bose-Einstein est celui du gaz parfait de bosons. Il est bien connu qu'en dessous d'une certaine température critique, un nombre macroscopique d'atomes s'accumulent dans l'état fondamental du système. Cela peut également s'écrire en terme de matrice densité ([9],[10]) :

$$< \vec{r} \mid \rho \mid \vec{r}^{'} >=< \Psi^{\dagger}(\vec{r})\Psi(\vec{r}^{'}) >= N_0\phi_0^*(\vec{r}^{'})\phi_0(\vec{r}) + \sum_k < n_k > \phi_k^*(\vec{r}^{'})\phi_k(\vec{r}) \tag{1.1}$$

où on a intoduit l'opérateur champ Ψ et sa décomposition sur les modes à une particule : $\Psi(\vec{r}) = \sum_k \phi_k(\vec{r})a_k$. Le premier mode devient de plus en plus dominant au fur et à mesure que T décroît. Pour un système de particules en interaction, il n'est à strictement parler plus possible de raisonner en termes d'états à une particule. Penrose et Onsager ([11]) ont alors proposé un critère pour définir la condensation, qui est que la plus grande valeur propre de la matrice densité garde une valeur de l'ordre de N, à la limite thermodynamique. Notons que l'expression ci-dessus reste valable pour peu que l'on ait décrit le système de N bosons en termes de quasi-particules, comme il est d'usage en matière condensée. Cela conduit naturellement à définir une fonction d'onde (macroscopique) du condensat, comme l'état dans lequel les bosons sont accumulés : $< N-1 \mid \Psi \mid N >= \phi_0$, à la limite où $\mid \vec{r} - \vec{r}^{'} \mid$ est très grand.
Dans la limite thermodynamique, cette fonction d'onde peut être interprétée comme la valeur moyenne de l'opérateur champ. Cependant, pour un système à nombre fini de particules, une telle moyenne sur un état de Fock est nulle, et il faut introduire un état cohérent (état propre de l'opérateur de destruction dans l'état condensé) pour retrouver une telle conclusion. Nous reviendrons plus loin sur ce point et passons à la description de la fonction d'onde du condensat.

1.1.2 Théorie de champ moyen : l'équation de Gross-Pitaevskii

Nous rappelons ici des résultats qui concernent la description d'un condensat dans le cadre d'une théorie de champ moyen (voir par exemple [12]), c'est à dire qui tient compte uniquement de l'effet moyen sur les atomes de leurs interactions mutuelles. Une des manières de traiter ce problème consiste à décrire le condensat par un opérateur champ Ψ, que l'on décompose en une valeur moyenne et en une partie fluctuante : $\Psi = \Psi + \delta\Psi$. En considérant qu'un nombre macroscopique de bosons s'est accumulé dans l'état fondamental : $N_0 \sim N$, alors que les populations des autres états sont de l'ordre de l'unité, on peut négliger les fluctuations pour ne garder que la partie moyenne, qui n'est plus un opérateur mais un nombre complexe Ψ, et qui s'interprète comme la fonction d'onde du condensat. Elle caractérise l'état modifié par les interactions dans lequel tous les bosons se sont accumulés. C'est la base de l'approche de

Bogolioubov, qui traite la fonction d'onde du condensat à l'ordre N_0^2, ainsi que les excitations élémentaires à l'ordre suivant (N_0). En traitant les interactions binaires par un pseudopotentiel en delta, on montre que cette fonction d'onde obéit à l'équation dite de Gross-Pitaevskii :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V_{\text{ext}}\Psi + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \mid \Psi \mid^2 = \mu\Psi \tag{1.2}$$

V_{ext} est le potentiel de piégeage. Pour un piège de Ioffe-Pritchard (voir plus loin), il est bien approximé par un potentiel harmonique anisotrope dans deux directions :

$$V_{\text{ext}} = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_z^2 z^2 + \omega_z^2 y^2) \tag{1.3}$$

avec $\omega_z \gg \omega_x$. a est la longueur de diffusion, paramètre qui caractérise le potentiel d'interaction entre atomes à très basse énergie. μ est le potentiel chimique du système de bosons condensés. On peut se limiter à cet ordre si la température est très basse ($T \ll T_C$: on a alors une "théorie effective à T=0" qui néglige les excitations thermiques).

1.1.3 Approximation de Thomas-Fermi

Il est possible de caractériser le rapport entre énergie d'interaction et énergie cinétique par le paramètre sans dimensions : $\chi = \frac{aN}{\sigma}$, où $\sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ est l'extension de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique associé au piège. Pour des condensats comportant plus de 100000 atomes, χ est de l'ordre de 100 au moins et le terme d'énergie cinétique est négligeable dans l'équation de Gross-Pitaevskii. Ceci constitue l'approximation dite de Thomas-Fermi, qui permet d'obtenir une solution analytique pour la fonction d'onde :

$$\phi_{TF}(x,y,z) = \sqrt{\max\left(0, \frac{\mu - V_{ext}(x,y,z)}{g_{coll}}\right)} \tag{1.4}$$

où $g_{coll} = N\frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$. En normalisant, on obtient la valeur du potentiel chimique :

$$\mu = \frac{\hbar\omega_\perp}{2}\left(\frac{15\lambda a N}{\sigma_\perp}\right)^{\frac{2}{5}} \tag{1.5}$$

$\lambda = \frac{\omega_x}{\omega_z}$ (le rapport d'aspect) caractérise l'allure anisotrope du condensat. En effet, on peut déduire les dimensions du condensat :

$$x_{max} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_x^2}} \tag{1.6}$$

$$y_{max} = z_{max} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_z^2}} \tag{1.7}$$

On trouve donc que $\frac{z_{max}}{x_{max}} = \lambda$. Pour un piège de Ioffe-Pritchard, $\lambda \ll 1$: le condensat a une allure de "cigare".

1.2 Propriétés de cohérence

1.2.1 Fonctions de corrélations

Les propriétés de cohérence d'un condensat sont notablement différentes d'un gaz "normal". On les mesure à l'aide de fonctions de corrélations, analogues aux fonctions de corrélations des champs en optique quantique. Donnons par exemple les fonctions d' autocorrélations d'ordre 1 et 2 :

$$G^{(1)}(\vec{r},\vec{r}') = < \Psi^\dagger(\vec{r})\Psi(\vec{r}') > \tag{1.8}$$

$$G^{(2)}(\vec{r},\vec{r}') = < \Psi^\dagger(\vec{r})\Psi^\dagger(\vec{r}')\Psi(\vec{r}')\Psi(\vec{r}) > \tag{1.9}$$

où l'expression entre crochets dénote une valeur moyenne : $< A >= Tr(\rho A)$, ρ étant la matrice densité du système, et Ψ désigne l'opérateur champ considéré : le champ électrique dans le cas des photons, l'opérateur de création en un point pour les atomes. A noter qu'on adopte systématiquement l'ordre normal dans le calcul des moyennes.
Dans le cadre de l'optique usuelle, ces fonctions permettent la caractérisation des champs. A titre d'exemple ([13]), la fonction de corrélation d'ordre 1 caractérise le contraste des franges d'interférences, celle d'ordre 2 la tendance au "groupement" (pour des sources thermiques, voir l'expérience de Hanbury-Brown et Twiss) ou à l'"antigroupement" des photons (sources lasers).
En ce qui concerne les gaz d'atomes, nous avons déjà mentionné que les fonctions de corrélations des condensats ont une portée spatiale et temporelle bien plus importante que celles des gaz thermiques([14]). Plus précisément, la longueur de cohérence passe soudainement de la longueur de De Broglie thermique à la taille du condensat lorsqu'on franchit la transition de phase. Focalisons nous sur les expériences d'interférométrie atomique. Comme pour les ondes de lumière, c'est la fonction de corrélation qui va déterminer le contraste des franges (comme on peut s'en persuader en ajoutant les fonctions d'ondes atomiques et en prenant le module). Il est cependant plus simple de raisonner en terme de phase entre les deux ondes de De Broglie, ce qui est tout à fait justifié pour des fonctions d'ondes atomiques. La situation est cependant un peu différente lorsqu'on a affaire à un condensat. Il s'agit en effet d'un système de bosons identiques en interactions, et comme il est illusoire de vouloir travailler avec la fonction d'onde symétrisée à N corps, on doit utiliser une description en termes de matrice densité. Considérons deux condensats, formés dans deux états spatiaux différents Φ_1 et Φ_2. La densité détectée en un point va s'exprimer en fonction de l'opérateur champ global, qui peut se développer sur tous les modes du système. Sans pertes de généralité, on peut négliger la contribution des états excités, dont l'effet est seulement d'ajouter du bruit incohérent au signal :

$$< \rho >=< \Phi_1^\dagger \Phi_1 > + < \Phi_2^\dagger \Phi_2 > +2Re < \Phi_1^\dagger \Phi_2 > \tag{1.10}$$

Cette formule montre que c'est bien la fonction de corrélation entre les opérateurs champs qui détermine le contraste. L'état cohérent que nous avons déjà mentionné devient alors très utile, car l'opérateur champ acquiert dans cet état une valeur moyenne non nulle, et se comporte comme un champ "classique", dont l'amplitude est $\sqrt{N_0}$ et dont la phase est fixée. Il est alors possible de raisonner directement en termes de champs atomiques "classiques" pour décrire une expérience, de la même manière qu'on peut raisonner avec des ondes planes lorsqu'on parle de lasers.

Brisure spontanée de symétrie de jauge : Cette "phase non nulle" est reliée à un phénomène très général en matière condensée, la "brisure spontanée de symétrie", qui apparaît lors d'une transition de phase du second ordre ([10]). Ici, c'est la symétrie dite de jauge qui est violée : elle correspond à l'invariance par multiplication par une phase arbitraire. Le système acquiert lors de chaque réalisation du condensat une phase bien définie, mais qui varie aléatoirement d'une expérience sur l'autre. Le problème avec ce concept est qu'il implique la violation de la conservation du nombre de particules, liée à l'invariance de jauge en théorie quantique des champs. Cela est difficilement acceptable pour des atomes aux énergies mises en jeu. On le voit d'ailleurs sur l'approche de Bogolioubov, où le nombre d'atomes du condensat est fixe alors que les quasi-particules peuvent apparaître et disparaître. En fait, il est plus raisonnable de considérer des états de Fock du système global, à nombre total de particules fixées : le nombre de particules condensées peut fluctuer, de même que le nombre d'excitations, tout en conservant le nombre total d'atomes. Cela fait disparaître l'interprétation en terme de champ classique possédant une phase définie. Cela ne doit pas être choquant, puisqu'on sait qu'on peut changer la phase globale d'un vecteur d'état sans modifier les précisions physiques. Cependant, le nombre de particules dans un état cohérent fluctue autour de la valeur moyenne avec une dispersion relative $1/\sqrt{< N >}$, qui tend vers zéro à la limite thermodynamique. Il est ainsi justifié d'utiliser les états cohérents dans cette limite, tout en prenant garde aux quantités non physiques, comme la phase (absolue) d'un condensat.

1.2.2 Phase relative entre deux condensats

La notion de phase relative entre deux condensats est cependant plus utile : elle permet en effet de décrire les corrélations entre deux condensats, même indépendants, de manière simple. En effet, il a été

montré ([15],[16]) que lorque l'on part de deux condensats initialement indépendants, et qu'on cherche à mesurer leurs corrélations, tout se passe comme si on avait au départ deux états cohérents, de phases ϕ_1 et ϕ_2, et qu'on les laissait interférer comme des champs classiques.
Pour le comprendre, considérons l'expérience de pensée semblable à celle décrite par Y.Castin et J.Dalibard ([15]). Deux condensats dans des états de Fock sont amenés à battre ensemble (i.e. on transfère les atomes dans un état dans lequel ils sont mutuellement cohérents). Les atomes sont mesurés un par un, et ils peuvent provenir d'un condensat aussi bien que de l'autre. Ainsi, au fur et à mesure des détections, l'incertitude sur $\Delta N = N_2 - N_1$ augmente, à partir de sa valeur initiale 0. A partir de simulations numériques([16]), on constate alors qu'un signal d'interférences se contruit progressivement. On se convainc facilement que la variable conjuguée de ΔN n'est autre que la phase relative entre les deux condensats, ϕ. L'augmentation de l'incertitude sur ΔN diminue ainsi corrélativement celle sur ϕ, qui devient de mieux en mieux définie lorsque le nombre d'atomes détectés augmente. De manière équivalente,on aurait pu décrire ce processus comme l'interférences de deux champs de De Broglie classiques, de phase relative $\phi = \phi_2 - \phi_1$ (ou au moins comme un mélange statistique de tels champs avec une distribution de ϕ piquée autour d'une valeur particulière).

L'identité entre les deux descriptions vient formellement du fait que la matrice densité des états cohérents doit être moyennée sur ϕ_1 et ϕ_2, qui prennent des valeurs aléatoires d'une réalisation sur l'autre. Elle se réduit alors à une combinaison d'états de Fock $\mid N_1; N_2 >$, avec $N_1 + N_2 = N$ fixé. Le point clé est que si on raisonne sur un ensemble statistique d'expériences, alors on doit utiliser la matrice densité, et le processus de moyenne fait disparaître les franges. Si on raisonne sur une expérience donnée, c'est le processus de mesure qui construit séquentiellement l'interférence, et donne une configuration particulière qui sera à priori différente pour une autre réalisation. Il est ainsi fructueux de raisonner en termes d'états cohérents, car cela permet des raisonnements plus simples et plus intuitifs, tout en donnant des résultats équivalents à une description dans la base de Fock.
Ces résultats théoriques ont été vérifiées expérimentalement lors de la première expérience d'interférométrie avec des condensats ([17]). Le groupe du MIT a procédé de la facon suivante : un double puits est faconné en focalisant un laser au centre d'un piège magnétique. Chaque puits contient un condensat obtenu par refroidissement évaporatif "usuel". Après coupure du piège, les condensats tombent et s'étalent, jusqu'à se recouvrir. On observe alors dans la densité détectée des franges d'interférences, caractérisant la phase relative des deux condensats. De plus, la position de ces franges varie d'une expérience sur l'autre, reflétant le fait que le système choisisse une phase définie, mais différente d'un coup sur l'autre (ou, de manière équivalente, que le processus de mesure engendre une séquence particulières de détection conduisant à des interférences quantiques, qui peut s'interpréter comme une différence de phase entre les deux condensats initiaux).

1.3 Le laser à atomes

1.3.1 Analogies avec le laser optique

Le principe du laser à atomes repose sur l'analogie avec les lasers optiques. Dans un laser optique, il est nécessaire de produire une inversion de population des niveaux atomiques, pour assurer une amplification des photons présents dans la cavité : une population macroscopique se construit dans un mode particulier de la cavité résonante, à cause du facteur d'accumulation bosonique. Enfin, un des miroirs de la cavité transmet une faible partie des photons accumulés et joue le rôle d'un coupleur de sortie.
Dans le cas d'un condensat de Bose-Einstein, il y a de nombreuses similitudes avec le laser optique. La cavité est constituée par le piège magnétique qui confine les atomes, l'accumulation dans un mode unique (qui est ici le mode fondamental) est assurée par le refroidissement évaporatif. Pour disposer d'une source efficace d'ondes de matières cohérentes, il s'agit d'arriver à extraire les atomes du piège de manière contrôlée.

1.3.2 Coupleurs de sortie : différentes méthodes

Plusieurs méthodes ont été proposées pour coupler les atomes vers l'extérieur du piège. L'obtention d'un régime stationnaire nécessite cependant l'utilisation d'un mécanisme de pompage continu vers le mode fondamental, en même temps que l'extraction du faisceau de sortie. Les configurations réalisées jusqu'à présent se contentent de remplir le niveau fondamental, d'"arrêter la pompe" (c'est-à-dire le refroidissement évaporatif), puis de coupler une partie des atomes vers l'extérieur. A strictement parler, il s'agit de lasers pulsés, à faibles taux de répétition (inférieurs au Hz).
Le groupe du MIT ([18]) a le premier utilisé un pulse radiofréquence bref (quelques microsecondes) et intense (fréquence de Rabi de l'ordre de la dizaine de kHz), qui transfère de manière cohérente une partie importante du condensat vers un état non piégeant. Les atomes se propagent ensuite sous l'effet de la pesanteur. A Yale ([19]), un condensat a été chargé dans un réseau optique créé par un piège dipolaire très désaccordé. Les atomes s'échappent des puits de potentiel lumineux à cause d'un effet tunnel induit par la gravité, analogue à l'effet Josephson entre deux supraconducteurs. Celui du NIST ([20]) a réussi à produire un faisceau quasi-continu grâce à une succession d'impulsions Raman très brèves, qui confèrent aux atomes une impulsion déterminée par la différence entre les impulsions des deux photons. Cette méthode permet également de contrôler la direction d'émission du faisceau atomique en modifiant l'orientation relative des deux lasers, alors que les autres méthodes s'en remettent à la gravité.
Le groupe de Münich a démontré la faisabilité d'un laser à atomes quasi-continu ([21]) avec un coupleur radiofréquence de faible puissance. Le faisceau est continu pendant toute la durée d'application de la radiofréquence (typiquement quelques dizaines de millisecondes). Par rapport à l'expérience du MIT, la différence est que le champ radiofréquence est beaucoup plus faible (fréquence de Rabi d'une centaine de Hz), permettant ainsi d'extraire les atomes pendant une durée bien plus importante avant de vider le condensat de ses atomes. En appliquant deux fréquences différentes, ils ont pu extraire deux faisceaux et observer des franges d'interférence entre les deux "jets" d'atomes condensés ([6]). Nous verrons que le contraste de ces franges permet de caractériser la fonction de corrélation spatiale du gaz piégé. C'est ce genre de techniques que nous voulons mettre en oeuvre expérimentalement, car elle nous paraît la plus adaptée au type d'expériences que nous voulons mener.

Chapitre 2

Modèle simple du laser à atomes

Nous présentons ici un modèle très simple du coupleur de sortie radiofréquence. Plusieurs auteurs se sont déjà penchés sur le problème ([8],[22],[23],[24],[25]), mais le résolvent numériquement. Le seul traitement analytique ([23]) néglige la gravité, qui est un élément crucial, comme nous le verrons plus loin. Nous en tenons compte dans notre calcul, et calculons le taux de départ du condensat à une et trois dimensions, et la fonction d'onde de sortie en une dimension. Nous discutons également les différents régimes de fonctionnement.

2.1 Problème envisagé

On considère ici un condensat d'environ 10^6 atomes de Rubidium, piégé dans un potentiel harmonique anisotrope. On considère l'action de la gravité par le potentiel $V_{\text{grav}} = -mgz$ (l'axe z pointe vers le bas). On peut alors, en incluant le terme d'interactions, écrire un hamiltonien effectif pour l'état piégeant :

$$H_{\text{eff}} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V_{\text{Zeeman}} - mgz + gn(\vec{r}) \tag{2.1}$$

avec $n(\vec{r})$ est la densité d'atomes au point $\vec{r}$. Les états atomiques se présentent sous la forme d'un produit tensoriel d'états de spin et d'états spatiaux, puisque les bosons sont polarisés. Dans l'expérience, les atomes sont piégés dans l'état $\mid F = 1; m_F = -1 >$, de fonction d'onde spatiale $\phi_{-1}(\vec{r})$, pour lequel l'hamiltonien effectif vaut :

$$H_{\text{eff}} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V_{\text{piege}} - mgz + gn(\vec{r}) \tag{2.2}$$

soit explicitement :

$$H_{-1} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_\perp^2 (z - z_0)^2 + \omega_\perp^2 y^2) + gn(\vec{r}) - \frac{1}{2}mgz_0 \tag{2.3}$$

On voit que l'effet de la gravité est simplement un déplacement du centre du condensat d'une quantité $z_0 = \frac{g}{\omega_\perp^2}$ par rapport au centre du piège, et un déplacement de l'origine des énergies : il n'y a aucune déformation. On choisit l'origine des z en z_0 pour la suite. Dans la limite des grands nombres d'atomes, la fonction d'onde du condensat est donnée par l'approximation de Thomas-Fermi, et son énergie par $E_{-1} = V_0 + \mu$, où V_0 est l'énergie potentielle provenant du champ magnétique constant de biais B_0 : $V_0 = g_F m_F \mu_B B_0$. Dans $\mid F = 1; m_F = 0 >$, l'hamiltonien est $H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + gn(\vec{r}) - mgz$, et dans $\mid F = 1; m_F = 1 >$, on obtient $H_{+1} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + gn(\vec{r}) - \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_\perp^2 (z + z_0)^2 + \omega_\perp^2 y^2) + \frac{1}{2}mgz_0$.

2.1.1 Couplage et évolution du condensat

Coupleur de sortie radiofréquence :

Ce condensat est soumis à un champ radiofréquence créé par une antenne, de la forme $\vec{B_{rf}} = B_{rf} \cos(\omega_{rf} t)\vec{e_x}$. Ce champ va induire des transitions (à un seul photon car on va utiliser une puissance radio faible, dans un sens qui sera précisé plus loin) entre les états $\mid F = 1; m_F = -1 >$, qui est

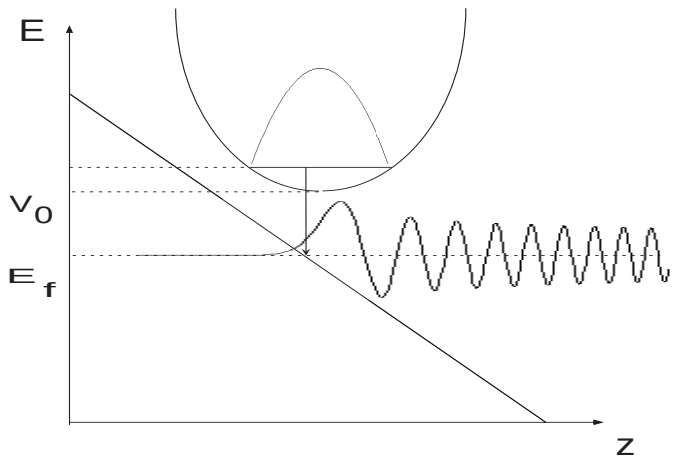

FIG. 2.1 – Représentation schématique du laser à atomes : le condensat est représenté par une fonction d'onde parabolique (à l'approximation de Thomas-Fermi), piégée dans un potentiel harmonique. La flèche représente un photon radiofréquence, qui induit une transition vers l'état propre du potentiel de pesanteur pour lequel il y a résonance.

piégéant, $\mid F = 1; m_F = 0 >$, qui ne voit pas le champ magnétique, et $\mid F = 1; m_F = 1 >$ qui est anti-piégeant. L'hamiltonien de couplage $W_{rf} = -\vec{\mu}.\vec{B}$ avec le moment magnétique de l'atome sécrit :

$$W_{rf} = \frac{m_F g_F \mu_B B_{rf}}{2}(e^{i\omega_{rf}t} + e^{-i\omega_{rf}t})J_x^{(1)} \tag{2.4}$$

et

$$J_x^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

On a négligé le vecteur d'onde du champ rf devant la taille atomique, ainsi que les variations spatiales du champ radiofréquence (la longueur d'onde est très supérieure aux dimensions atomiques). En posant $\hbar\Omega_{rf} = \frac{m_F g_F \mu_B B_{rf}}{2\sqrt{2}}$ (fréquence de Rabi), et en faisant l'approximation du champ tournant, on obtient les éléments de matrice du coupleur rf, par exemple :

$$< 0 \mid W_{rf} \mid -1 >= \hbar\Omega_{rf} < \phi_0(\vec{r}) \mid \phi_{-1}(\vec{r}) > e^{i\omega_{rf}t} =< -1 \mid W_{rf} \mid 0 >^* \tag{2.6}$$

Cette relation exprime que le couplage entre les deux états hyperfins est proportionnel à l'intégrale de recouvrement entre leurs fonctions d'ondes spatiales.

Equations d'evolution :

L'évolution du système est régie par trois équations de Gross-Pitaevskii, couplées par W_{rf}, qui décrivent le condensat piégé et le faisceau extrait par le coupleur rf.

$$i\hbar\frac{\partial\psi_{-1}}{\partial t} = [-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{\text{piege}} - mgz + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}n(\vec{r})]\psi_{-1} + W_{-10}\psi_0 \tag{2.7}$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi_0}{\partial t} = [-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - mgz + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}n(\vec{r})]\psi_0 + W_{0-1}\psi_{-1} + W_{0+1}\psi_{+1} \tag{2.8}$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi_{+1}}{\partial t} = [-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - V_{\text{piege}} - mgz + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}n(\vec{r})]\psi_{+1} + W_{+10}\psi_0 \tag{2.9}$$

$$\tag{2.10}$$

En posant ${\psi_m}' = \psi_m e^{-im\omega_{rf}t}$, on passe dans le référentiel tournant avec le champ et on élimine la dépendance temporelle explicite du couplage. Chaque "fonction d'onde macroscopique" est la valeur

moyenne d'un opérateur champ détruisant un atome en $\vec{r}$ dans un des trois sous-niveaux Zeeman de F=1, m_F =-1, +1 ou 0. Elles s'interprètent plus simplement comme les états dans lesquels s'accumulent les atomes condensés, modifiés par les interactions et par le couplage. En régime de couplage faible, l'état $m_F = +1$ est peuplé de manière négligeable. On ne considérera dans toute la suite que 0 et -1.
Le point central est que le couplage rf est cohérent : l'état final est une superposition cohérente de deux "états quantiques macroscopiques" représentée par une fonction d'onde macroscopique, la conservation de la norme impliquant alors celle du nombre d'atomes. On décrit alors le système formé par le condensat piégé et le faisceau par un vecteur d'état global :

$$\psi^{'} = \psi^{'}_{-1} + \sum_{E_f} \psi^{'}_{0,E_f} \tag{2.11}$$

Notons qu'on peut assimiler les états internes à des polarisations, et que deux ondes de matière de polarisations orthogonales sont incohérentes :

$$< F = 1; m_F = -1 \mid F = 1; m_F = 0 >= 0 \tag{2.12}$$

Analogie avec une équation de Schrödinger

Les équations de Gross-Pitaevskii couplées peuvent alors être considérées comme les projections de l'équation de Schrödinger pour $\Psi^{'}$ avec l'hamiltonien H_{eff} sur les états propres de H_{eff} :

- $\mid -1 >$, qui est un état discret d'énergie $E_{initiale} = V_0 + \mu$
- $\mid 0 : E, \beta >$, qui appartient un continuum d'états libres, caractérisés par leur énergie E et d'autres paramètres désignés par β. Nous les verrons plus en détail dans une prochaine section.

La différence principale est que dans $m_F = -1$, le terme Zeeman dans H_{eff} est un terme de piégeage, alors que dans $m_F = 0$ il est identiquement nul : le potentiel est alors expulsant (l'accélération due à la pesanteur et les interactions contribuent à chasser les atomes du condensat). On va modéliser le problème en considérant que le potentiel effectif dans l'état $\mid F = 1; m_F = 0 >$ est simplement le potentiel de pesanteur : on néglige donc les interactions entre atomes dans le faisceau de sortie et entre atomes piégés et extraits. La première hypothèse est certainement justifiée dans la limite des faibles couplages, puisqu'alors le nombre d'atomes dans le faisceau est faible. On peut la quantifier en estimant le rapport entre énergie d'interaction et énergie potentielle, par μ/mgz_{max}, où μ est le potentiel chimique et z_{max} la taille du condensat dans la direction z. Pour 10^6 atomes, $\mu/\hbar$ vaut typiquement quelques kHz, et z_{max} quelques microns, ce qui donne une énergie potentielle (en unités de fréquence) de quelques MHz. L'effet des interactions n'est donc qu'une faible perturbation par rapport à celui de la pesanteur : c'est l'accélération due à la gravité qui est la cause principale de l'extraction. Par contre, la seconde est plutôt arbitraire puisque le nombre d'atomes dans le condensat reste de l'ordre de N. Cela permet cependant de mener des calculs analytiques. De plus, c'est la fonction d'onde hors du condensat qui nous intéresse en premier lieu.
Sous ces hypothèses, les équations d'évolution s'écrivent :

$$i\hbar\frac{\partial\psi^{'}_{-1}}{\partial t} = [h_{-1} - \hbar\omega_{rf} + gn(\vec{r})]\psi^{'}_{-1} + \hbar\Omega_{rf}\psi^{'}_0 \tag{2.13}$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi^{'}_0}{\partial t} = [h_0 + gn(\vec{r})]\psi^{'}_0 + \hbar\Omega_{rf}\psi^{'}_{-1} \tag{2.14}$$

On a noté h_m le hamiltonien à une particule dans le sous-niveau Zeeman m.

2.1.2 Rappels sur l'évolution d'un état discret couplé à un continuum

Nous résumons ici succintement les résultats de ([26]), relatifs au couplage entre un état atomique discret et un continuum d'états libre. Il nous seront utiles par la suite pour comprendre qualitativement les différents comportements.
On considère ici des états propres d'un hamiltonien H dont le spectre est constitué d'un niveau discret b

et d'un spectre continu repéré par l'énergie E et un certain nombre d'autres nombres quantiques que l'on désignera par β :

$$\begin{aligned} H_0 \mid b > &= E_b \mid b > \quad (2.15) \\ H_0 \mid E, \beta > &= E \mid E, \beta > \quad (2.16) \\ & \quad (2.17) \end{aligned}$$

On applique un couplage λV qui n'agit que de b vers le continuum :

$$< E, \beta \mid \lambda V \mid b >= v(E, \beta) \tag{2.18}$$

λ est un paramètre sans dimensions qui caractérise la force du couplage. A partir de la méthode de la résolvante, il est possible à cause de la forme des éléments de matrice de V de calculer exactement l'opérateur d'évolution de b, et d'exhiber un paramètre crucial dans l'analyse :

$$\Gamma_b(E) = \frac{2\pi}{\hbar} \int dE d\beta \rho(E, \beta) \mid v(E, \beta) \mid^2 \tag{2.19}$$

En fonction de E, $\Gamma_b(E)$ a la forme d'une courbe "en cloche" dont la largeur en énergie est Δ : c'est la "largeur effective du continuum" accessible depuis l'état discret. On peut alors distinguer deux régimes extrêmes aux comportements radicalement différents.

Couplage fort : Dans ce cas, l'évolution du système est caractérisée dans l'espace de Fourier (cela signifie que l'on regarde la dépendance en énergie de l'opérateur d'évolution) par une double structure composée d'un pic de Dirac et d'une courbe étroite de largeur γ proportionnelle à λ^2 . Dans l'espace réel, cela se traduit par une oscillation entre les deux énergies correspondantes à la limite où λ tend vers l'infini. Pour un couplage réel, γ reste fini, et la largeur de l'"état" correspondant induit une décroissance aux temps longs des oscillations. Ce résultat se comprend comme l'analogue d'une oscillation de Rabi pour un système à deux niveaux caractérisé dans l'espace de Fourier par deux pics de Dirac. Le couplage étant tout de même fini, un des états possède une largeur non nulle qui produit un amortissement de l'oscillation.

Couplage faible : Le cas inverse consiste à regarder un couplage faible. A la limite où λ tend vers 0, le continuum devient infiniment "large" et le calcul se résume au traitement de Wigner-Weisskopf : on retrouve une dépendance lorentzienne dans l'espace de Fourier, qui conduit à la décroissance exponentielle bien connue :

$$< b \mid U(t) \mid b >= e^{-i\frac{E_b t}{\hbar}} e^{-\lambda^2 \frac{\Gamma t}{2}} \tag{2.20}$$

Ici, $\Gamma = \Gamma_b(E_b)$ se résume au taux de décroissance calculé par la règle d'or de Fermi. En fait, pour λ fini, la décroissance de l'état discret présente des corrections à la décroissance exponentielle, de plus en plus significatives au fur et à mesure que λ augmente.
Pour illustrer ces considérations, l'exemple tiré de ([27]) où le couplage est de la forme :

$$< E, \beta \mid \lambda V \mid b >= \frac{w}{\sqrt{1 + (\frac{E}{\Delta})^2}} \tag{2.21}$$

Dans le cas où le taux de décroissance Γ calculé avec la règle d'or de Fermi est petit devant la largeur Δ du continuum, on trouve bien une décroissance exponentielle aux temps longs, et une oscillation amortie dans le cas inverse. Par la suite, nous retiendrons ce critère : le couplage peut être considéré comme faible si $\hbar\Gamma \ll \Delta$.

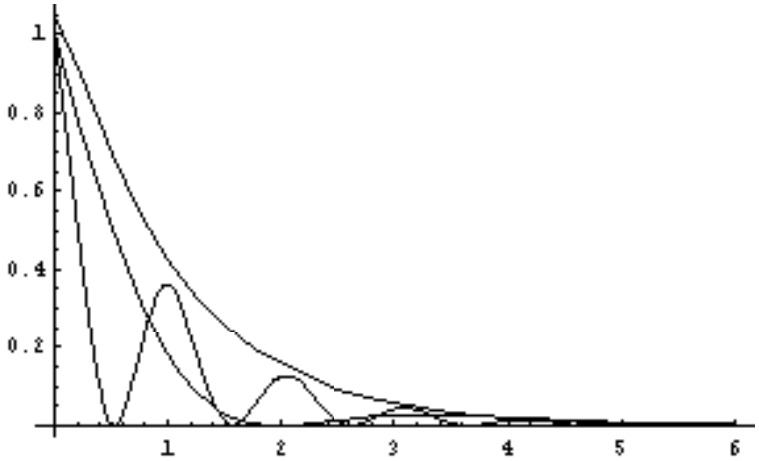

FIG. 2.2 – Probabilité pour que l'atome reste dans l'état discret en fonction de t, pour trois valeurs de $p = \hbar\Gamma/\Delta$: p=0.5 , p=2 ,p=60. Le temps est en unités de $\hbar/\Delta$.

Remarquons qu'en toute rigueur, ces résultats ne s'appliquent pas au cas que nous considérons. En effet, l'énergie du niveau discret dépend ici du temps, car le potentiel chimique dépendent comme $N^{2/5}$ du nombre d'atomes dans le condensat, qui décroît. Dans le piège harmonique, il existe une échelle de temps naturelle donnée par $\omega_{\text{piege}}^{-1}$. Comparer la fréquence de Rabi, qui caractérise la force du couplage, à la fréquence d'oscillaton dans le piège va permettre de savoir si l'équilibre dynamique du condensat est perturbé fortement par le processus ($\Omega_{Rf} \gg \omega_{\text{piege}}$), ou bien s'il n'est quasiment pas affecté ($\Omega_{Rf} \ll \omega_{\text{piege}}$), à part pour la décroissance du nombre d'atomes. Notons que dans les deux régimes il est possible de créer un couplage quasi-continu : la différence entre les deux se manifeste par la distribution des densités dans le piège et dans le faisceau. Par contre, les phénomènes d'oscillations sont manifestement incompatibles avec un couplage presque pas perturbatif pour le piège. De fait, les oscillations de Rabi et la décroissance quasi-exponentielle ont été observées expérimentalement, respectivement dans l'expérience du MIT et de Münich. Nous reviendrons sur ces questions lors de l'étude de la dynamique.

2.2 Modèle 1 D

2.2.1 Traitement quantique d'une particule soumise à la gravité

Considérons une particule de masse m, dans le potentiel du à la gravité $V = -mgz$. L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dz^2} - mgz\phi = E\phi \tag{2.22}$$

ou encore :

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} + \xi\phi = 0 \tag{2.23}$$

en intoduisant $l = (\frac{\hbar^2}{2mg})^{\frac{1}{3}}$ (échelle de longueur), $z_E = \frac{E}{mg}$ et $\xi = \frac{z+z_E}{l}$. Les solutions de cette équation sont les fonctions d'Airy de première et seconde espèce, $Ai(-\xi)$ et $Bi(-\xi)$.

Usuellement, on impose les conditions aux limites $lim_{z\to\infty}\phi(z) = 0$ et $lim_{z\to 0}\phi(z) = 0$ (barrière en z=0). Cela conduit à ne conserver que la solution Ai, car Bi diverge exponentiellement à l'infini, et à quantifier l'énergie selon $E = -mg\xi_n$, où ξ_n est le n-ième zéro de la fonction d'Airy.
Cependant, si on veut décrire un flux d'atomes tombant en chute libre depuis le point $z = z_E$, il faut en fait imposer une condition d'onde sortante pour z grand, ce qui conduit à adopter la combinaison linéaire suivante ([28]) :

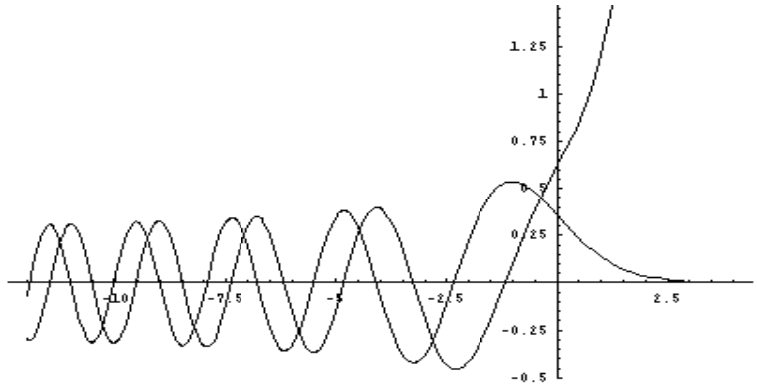

FIG. 2.3 – Les fonctions d'Airy de première et seconde espèce, solutions de l'équation de Schrödinger dans un potentiel linéaire.

$$\phi_E(\xi) = A(Ai(-\xi) - iBi(-\xi)) \tag{2.24}$$

A partir des formes asymptotiques de Ai et Bi :

$$Ai(-x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi \mid x \mid^{1/2}}} \cos\left(\frac{2}{3} \mid x \mid^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{2.25}$$

$$Bi(-x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi \mid x \mid^{1/2}}} \sin\left(\frac{2}{3} \mid x \mid^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{2.26}$$

on trouve facilement que :

$$\phi_E(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi \mid \xi \mid^{1/2}}} e^{i\frac{2}{3}|\xi|^{3/2} - i\frac{\pi}{4}} \tag{2.27}$$

Il est à noter que c'est exactement la forme que l'on obtient en utilisant l'approximation semi-classique WKB, qui est en fait valable dès que $z + z_E \geq l$, ce qui est rapidement vérifié dans notre problème car $l \approx 0,28\mu m$.

2.2.2 Calcul du taux d'extraction

On considère donc pour commencer un modèle unidimensionnel où le continuum final est constitué de fonctions d'Airy, caractérisées par leur énergie E. L'état initial est l'état piégé, d'énergie $V_0 + \mu$: nous le décrivons à l'approximation de Thomas-Fermi. On se place dans la situation où la puissance du champ radiofréquence est faible. On peut donc considérer l'extraction comme quasi-continue, car la variation de N est lente, et on a un taux d'extraction pratiquement constant (voir plus loin pour une justification plus précise). On se propose d'évaluer le taux de transition de l'état piégeant vers l'état non piégeant, en appliquant la règle d'or de Fermi. Ensuite, nous calculons approximativement la fonction d'onde de sortie, en perturbation par rapport à la base des états non couplés, formée (en représentation position) par la fonction d'onde du condensat et les fonctions d'Airy. On notera $\psi(z,t)$ la fonction d'onde globale, et $\psi_{-1}(z,t), \psi_0(z,t)$ ses composantes sur les états de polarisation qui s'expriment comme une somme sur les modes appropriés, avec des coefficients donnés par la théorie habituelle des problèmes dépendants du temps. Pour $m_F = -1$, on ne considère en fait que le fondamental (puisque c'est le seul mode peuplé dans notre approche), noté $\phi_{TF}(z)$. Pour $m_F = 0$, on considère les fonctions d'Airy normées qu'on note $\phi_E(z)$.

2.2.3 Règle d'or de Fermi

Pour cela, on introduit une boîte fictive de quantification, fermée en $z = -z_E$ et en $z = L$, avec $L \gg l$. En imposant que la probabilité de présence dans la boîte vaille 1 jusqu'en L, on peut arriver à une expression de normalisation de Ai :

$$A^2 \int_{-z_E}^{L} Ai(-\frac{z+z_E}{l})^2 dz = 1 \tag{2.28}$$

En utilisant la forme asymptotique de Ai, et en approximant le sinus carré par 1/2, car il varie très rapidement à l'échelle de l'enveloppe, on arrive au coefficient de normalisation :

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{l}} \frac{1}{\alpha_L} \tag{2.29}$$

où $\alpha_L = (\frac{L+z_E}{l})^{1/4}$.
Nous pouvons calculer la densité d'états finaux en imposant l'annulation de la fonction d'onde sur le mur en L. La forme asymptotique mène alors à :

$$n\pi = l^{-3/2} \frac{2}{3} (L + z_E)^{3/2} \tag{2.30}$$

avec n entier, ce qui donne par différentiation :

$$\rho(E) = \frac{dn}{dE} = \frac{1}{\pi m g l} \alpha_L^2 \tag{2.31}$$

Une approche entièrement équivalente consiste à imposer la condition de quantification WKB, à la fonction d'onde calculée par la même méthode, c'est à dire à la forme asymptotique. Le calcul de la probabilité de transition par unité de temps nécessite encore de calculer l'élément de matrice de la perturbation entre les états finaux et initiaux, c'est à dire l'intégrale de recouvrement entre ces états. On montre dans l'annexe A qu'elle est égale à :

$$I =< \phi_f \mid \phi_i >= \frac{\sqrt{\pi l}}{\alpha_L} \phi_{TF}(z_E) \tag{2.32}$$

c'est à dire qu'elle est proportionnelle à la valeur de la fonction d'onde du condensat prise au point de rebroussement classique z_E. L'application de la règle d'or de Fermi :

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} (\hbar \Omega_{rf})^2 \mid I \mid^2 \rho(E_f = E_i - \hbar\omega_{rf}) \tag{2.33}$$

donne alors :

$$\frac{\Gamma}{\Omega_{rf}^2} = \frac{2\pi\hbar}{mg} \frac{\mu}{g_{1D}} \max\left[0, 1 - (\frac{E}{mgz_{max}})^2\right] \tag{2.34}$$

En fait, nous avons vu au paragraphe précédent que la fonction Ai n'est pas bien adaptée à la description d'un jet quasi-continu. L'utilisation de la combinaison linéaire ϕ_E mène à un résultat un peu différent. La densité d'états ne change pas, et on peut considérer que le résultat sur l'intégrale de recouvrement est conservé (voir les arguments de l'annexe pour plus de détails).
En imposant que la probabilité de présence de la fonction d'onde vaille 1 sur le segment où est elle confinée ($[z_E, L]$), on trouve un résultat plus petit de $\sqrt{2}$, ce qui conduit à un taux deux fois moindre :

$$\frac{\Gamma}{\Omega_{rf}^2} = \frac{\pi\hbar}{mg} \frac{\mu}{g_{1D}} \max\left[0, 1 - (\frac{E}{mgz_{max}})^2\right] \tag{2.35}$$

2.2.4 Discussion de la formule

Cette expression appelle les commentaires suivants :

- Nous désirons calculer un coefficient d'interactions effectif à une dimension g_{1D} pour pouvoir appliquer cette formule. Pour cela, nous imposons que le potentiel chimique à 1 D soit égal au potentiel chimique à 3 D, ce qui donne un coefficient effectif :

$$g_{1D} = \frac{2}{3}(\frac{\omega_x}{\omega_z})^{3/5}(\frac{15aN}{\sigma_z})^{3/5}\hbar\omega_z\sigma_z \tag{2.36}$$

- La décroissance abrupte en z_{max} vient de l'approximation de Thomas-Fermi. Stringari et al ([29]) ont montré que la décroissance était lissée par une prise en compte du terme d'énergie cinétique près du bord, où il n'est plus négligeable. Nous verrons aussi qu'un calcul à trois dimensions fait disparaître cet effet.
- La probabilité de transition n'est appréciable que lorsque le "centre" de la fonction d'Airy se trouve dans la zone du condensat, c'est à dire si $-z_{max} < z_E < z_{max}$ (à une distance l négligeable près), c'est à dire à l'endroit où les fonctions d'ondes se recouvrent le plus. Du point de vue des modes de sortie, cela veut dire que le coupleur rf agit sur une plage en énergie centrée en $E_f = V_0 + \mu - \hbar\omega_{rf}$ et de largeur $\hbar\Gamma$. Du point de vue du condensat on peut associer une altitude z_E à l'énergie E, qui s'interprète comme le "point de départ" de l'atome en chute libre. La zone couplée sera donc centrée en $z = z_{E_f}$, et de largeur $\Delta z = \hbar\Gamma/mg$. Comme notre calcul est valable précisément quand $\Delta z/z_{max} \ll 1$, on peut considérer que l'extraction est quasiment ponctuelle en $z = z_E$.
- La largeur de la fonction $\Gamma(E)$ est donnée essentiellement par la différence d'énergie gravitationnelle entre le haut et le bas du condensat : $\Delta E/\hbar \approx 2mgz_{max}/\hbar$, de l'ordre de 20 kHz pour un condensat d'environ un million d'atomes.
- Cela permet de définir une fréquence de Rabi critique, au dessous de laquelle on est en régime quasi-stationnaire, et au dessus en régime oscillatoire, par la relation $\hbar\Gamma_C \sim 2mgz_{max}$. L'utilisation de (2.35) donne alors :

$$\Omega_{rf}^C = \sqrt{\frac{2(mg)^2 z_{max} g_{1D}}{\pi\hbar\mu}} = \sqrt{\frac{g_{1d}}{\mu}\frac{gz_{max}}{\pi l^3}} \sim 10kHz \tag{2.37}$$

  pour 10^6 atomes.
- Commentons enfin la dépendance de Γ vis à vis du nombre d'atomes : $\Gamma \sim \mu/g_{1D} \sim N^{-1/5}$, si on omet le terme en z_{max}. Le taux de départ dépend donc faiblement du nombre d'atomes, et pourra être pris comme quasiment constant tant que le nombre d'atomes piégés n'aura pas significativement changé.

2.2.5 Fonction d'onde du faisceau de sortie

La fonction d'onde des atomes extraits peut s'écrire, à la limite perturbative :

$$\mid \Psi_0(z,t) > \approx -2i\pi \sum_{E_f} < f \mid W_{rf} \mid i > e^{-i\frac{E_i+E_f}{\hbar}t}\delta^{(t)}(E_f - E_i) \mid \phi_E > \tag{2.38}$$

où $\delta^{(t)}(E)$ est une fonction de diffraction de largeur $\hbar/t$ qui tend vers une fonction de Dirac. En prenant en compte la conservation de l'énergie, et les formules donnant la fonction propre ϕ_E et la densité d'états il vient :

$$\psi_0(z,t) \approx -2i\frac{\hbar\Omega_{rf}}{mgl^{3/2}}\phi_{TF}(z_E)\frac{e^{i(\frac{2}{3}|\xi|^{3/2}+\omega_{rf}t)}}{\mid \xi \mid^{1/4}}e^{-2i\frac{V_0+\mu}{\hbar}t-i\frac{\pi}{4}} \tag{2.39}$$

avec $E = V_0 + \mu - \hbar\omega_{rf}$, $z_E = -\frac{E}{mg}$ et $\xi = \frac{z+z_E}{l}$. On peut réécrire cette équation comme :

$$\psi_0(z,t) \approx -i\sqrt{\frac{\hbar\Gamma}{mgl}}\frac{e^{i(\frac{2}{3}|\xi|^{3/2}+\omega_{rf}t)}}{l^{1/4} \mid z + z_E \mid^{1/4}}e^{-2i\frac{V_0+\mu}{\hbar}t-i\frac{\pi}{4}} \tag{2.40}$$

Evaluons maintenant dans quelle gamme de temps l'approche perturbative est justifiée. Pour pouvoir assimiler $\delta^{(t)}$ à une fonction de Dirac, il faut que t soit grand devant $\hbar/\Delta$, Δ étant la largeur du continuum. De plus, pour que la probabilité de transition reste faible on doit rester à $t < \Gamma^{-1}$. Finalement, on peut utiliser cette approche dans la gamme de temps :

$$\frac{\hbar}{mgz_{max}} \ll t \ll \Gamma^{-1} \tag{2.41}$$

Indiquons tout de suite que dans les conditions expérimentales où on souhaite se placer, cette inégalité est satisfaite. Dans des condition expérimentales raisonnables, disons $\Gamma \sim 300$ Hz et $N \sim 5.10^5$ atomes, on doit imposer $1\ ms < t < 500\ ms$. Les mesures étant faites pour des temps variant entre quelques millisecondes et quelques dizaines de millisecondes, elles pourront valablement être décrites par le traitement en perturbation.

2.3 Modèle 3D

2.3.1 Calcul du taux d'extraction

Nous pouvons généraliser ce calcul à trois dimensions, toujours en négligeant les interactions dans le faisceau de sortie. L'état piégé est toujours décrit dans l'approximation de Thomas-Fermi, et les états libres sont états propres de :

$$H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} - mgz \tag{2.42}$$

Les variables x,y,z étant séparées naturellement, un état propre est simplement le produit tensoriel de deux ondes planes dans le plan transverse (x,y) et d'une fonction d'Airy dans la direction longitudinale. L'état final est donc caractérisé par son énergie $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + mgz_E$, et par deux nombres quantiques désignant l'impulsion transverse, k_x et k_y. La densité d'états finaux se calcule par :

$$\rho_{3D}(E) = \frac{d^3N}{dk_x dk_y dE} = \frac{1}{mg}\frac{d^3N}{dk_x dk_y dz_E} = \frac{L^2}{4\pi^2}\rho_{1D} \tag{2.43}$$

et finalement :

$$\rho_{3D}(E) = \frac{L^2}{4\pi^3}\frac{1}{mgl}\alpha_L^2 \tag{2.44}$$

Le calcul de l'intégrale de recouvrement est mené dans l'annexe B, sous certaine hypothèses qui lui confèrent un caractère approché. Cela permet de calculer le taux de départ :

$$\frac{\Gamma}{\Omega_{rf}^2} \approx 0,55\frac{2\pi^2\hbar}{9mg}\frac{\mu x_{max} y_{max}}{g_{coll}} \max\left[1 - (\frac{E}{mgz_{max}})^2\right]^3 \tag{2.45}$$

Les trois dernières remarques sur le taux à 1D sont toujours valables, à condition de prendre $\Omega_{rf}^C \approx 6500$ Hz, et $\Gamma/\Omega_{rf}^2 \approx N^{-2/5}$ à résonance.

2.3.2 Comparaison avec l'espace libre

Il est intéressant de comparer ce résultat avec celui obtenu en négligeant la gravité (les fonctions propres de sortie sont alors simplement des ondes planes). Le calcul donne exactement dans le cas d'un condensat isotrope :

$$\frac{\Gamma_{\text{op}}}{\Omega_{rf}^2} = 4\pi^3\frac{\mu}{g_{coll}}\frac{mr_{max}^3}{\hbar}f(E/E_1) \tag{2.46}$$

La fonction f est égale à $f(x) = \frac{J_2(\sqrt{x})^2}{(x)^{3/2}}$ et $E_1 = \frac{\hbar^2}{2mr_{max}^2}$, J_2 désignant la fonction de Bessel usuelle d'ordre 2. Cette fonction présente des ailes, comme une fonction de diffraction, qui sont dues aux discontinuités de la fonction de Thomas-Fermi aux bords. On peut s'en débarasser en "apodisant" la fonction,

ie en ne retenant que les premiers termes du développement en série entière, on a l'expression approchée suivante : $f(x) \approx \frac{1}{64}\sqrt{x}e^{-6x}$, ce qui donne :

$$\frac{\Gamma_{\text{op}}}{\Omega_{rf}^2} = \frac{\pi^3}{16}\frac{\mu}{g_{coll}}\frac{mr_{max}^5}{\hbar}\sqrt{\frac{E}{E_1}}e^{-\frac{E}{6E_1}} \tag{2.47}$$

Ce résultat ne correspond pas à l'utilisation de la règle d'or de Fermi, mais plutôt au calcul du paramètre $\Gamma_b(E)$ introduit dans la section (1.3). En effet, les hypothèses de calcul de la règle d'or de Fermi sont violées : la densité d'états et l'élément de matrice varient rapidement autour de l'énergie de résonance $E \sim E_1$. Plus précisément, ceci correspond au comportement type "couplage fort" décrit dans (1.3). La largeur du continuum est très étroite (quelques centaines de Hertz avec les paramètres caractéristiques), et on doit imposer une fréquence de Rabi très faible, de l'ordre de quelques Hertz seulement, pour être en régime de couplage faible. Si le condensat était couplé vers l'espace libre, il exhiberait donc des oscillations entre états piégé et non piégé aux fréquences expérimentalement accessibles. Au contraire, en présence de gravité, la gamme de fréquences correspondant au couplage continu devient beaucoup plus large.

2.3.3 Approximation de Born-Markov

Plusieurs auteurs ([30],[31],[25]) ont déjà identifié la présence d'un état "lié" près du piège si on omet la gravité, et il a été également remarqué qu'en en tenant compte dans les calculs on détruisait cet état lié. L'interprétation repose en fait sur la possibilité ou non de faire l'approximation de Born-Markov pour le laser atomique. Elle consiste à ignorer les variations de la fonction d'onde des atomes piégés durant le temps de corrélation du continuum, inversement proportionnel à sa largeur. En d'autres termes, on doit se situer dans le régime de couplage faible : le temps de relaxation du condensat doit être très long devant le temps de corrélation du "réservoir" des modes initialement vides. Cela permet en fait de négliger les superpositions quantiques qui peuvent apparaître entre atomes piégés et libres, car dans cette limite elles se détruisent sur un temps trop court pour que le système ait eu le temps d'évoluer (voir [31]). Classiquement, cela permet de considérer que les atomes sont soit piégés, soit dans le faisceau de sortie. Il a été montré que le temps de corrélation (ou de mémoire) était suffisamment court pour des atomes dans un champ de pesanteur pour pouvoir utiliser cette approximation. Par contre, il est trop long pour des atomes en espace libre et le comportement est "non-Markovien" (il correspond à des oscillations de Rabi).
Physiquement, on peut comprendre pourquoi grâce à un calcul simple. Cherchons à calculer la distance d qu'aurait parcouru un atome transféré à t=0 vers l'état non piégeant en une période de Rabi. Dans le cas des ondes planes, on peut prendre une énergie de sortie égale à celle de l'état initial (en surestimant) : $d_{\text{op}} \approx \sqrt{\frac{2E_0}{m}}\frac{1}{\Omega_{rf}}$. Si on prend (arbitrairement) une fréquence de Rabi de 300 Hz, on trouve : $d_{\text{op}} \approx 0,3\mu m$. Par contre, si on considère un atome accéléré par la gravité, on aura : $d_{\text{grav}} \approx \frac{gt^2}{2} \approx \frac{g}{2\Omega_{rf}^2}$. Pour la même fréquence cela correspond à $d_{\text{grav}} \approx 2\mu m$. Cela veut dire que le temps d'une période, une onde plane n'aura pas le temps de "s'échapper" avant que la rf ne la couple de nouveau dans l'état piégeant (la taille verticale du condensat étant de l'ordre de quelques microns). Par contre, une onde accélérée par la gravité sortira du condensat et ne sera pas recouplée vers l'état piégeant. On peut aussi estimer par ces formules à partir de quelle fréquence de Rabi la distance parcourue pendant une période est de l'ordre de la taille du condensat : cela donne une estimation de la fréquence critique entre comportement quasi-continu et oscillations. En imposant $d \approx z_{max} \approx 2,5\mu m$ on trouve :

$$\Omega_{rf}^{\text{OP}} \approx \sqrt{\frac{2E_0}{mz_{max}^2}} \sim 50Hz \quad \Omega_{rf}^{\text{grav}} \approx \sqrt{\frac{g}{2z_{max}}} \sim 2500Hz \tag{2.48}$$

.

2.4 Caractéristiques du laser : largeur de raie et dynamique

A partir du taux de départ calculé précédemment, on peut obtenir des résultats à la limite des couplages faibles. Nous avons vu que le taux dépend en fait du temps par l'intermédiaire du nombre d'atomes. On peut cependant écrire que :

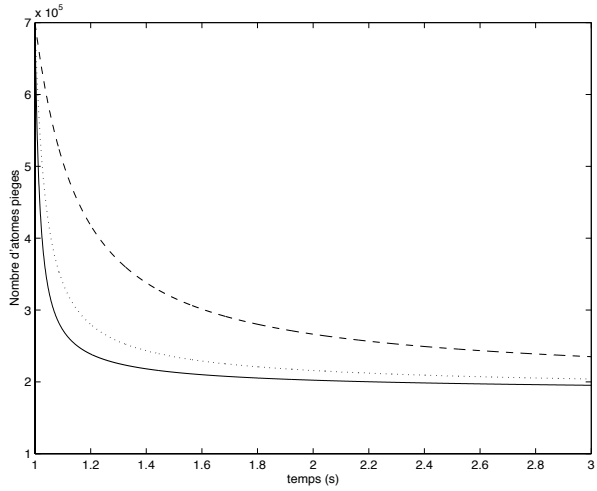

FIG. 2.4 – Nombre d'atomes piégés en fonction du temps pour un condensat contenant initialement $7,5.10^5$ atomes. La courbe supérieure en tirets correspond à une fréquence de Rabi de 300 Hz, celle en pointillés à 600 Hz et la courbe inférieure en traits pleins à 900 Hz. Le désaccord du coupleur est $-\Delta/2$. On voit apparaître un "plateau" traduisant le comportement non linéaire du laser. Le calcul provient de l'intégration de la formule 3D pour Γ.

$$\phi_{-1}(x,y,z,t) \approx e^{i\frac{E_{-1}t}{\hbar}} e^{-\Gamma\frac{t}{2}} \phi_{-1}(x,y,z,0) \tag{2.49}$$

si on est à très faible couplage, en utilisant l'approche de Wigner-Weisskopf pour le système d'équations "de Schrödinger" couplées, qui revient en fait à faire une approximation de Born-Markov. On en déduit l'équation d'évolution du nombre d'atomes :

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\Gamma[N(t)]\ N(t) \tag{2.50}$$

qui doit être comprise comme une approximation "adiabatique" valable dans la limite où Γ est faible. Cette équation est non linéaire, mais peut être résolue numériquement. On peut en tirer :

- La dynamique temporelle du nombre d'atomes piégés à fréquence et puissance fixée
- Une courbe de résonance à temps et puissance rf fixés où on varie la fréquence du champ.

On voit apparaître un comportement limite pour le nombre d'atomes, qui montre que tous les atomes ne sont pas couplés, et que le laser s'arrête au bout d'un certain temps. L'explication physique est la suivante : à cause de la gravité, le centre du condensat et le centre du piège sont décalés de $\frac{g}{\omega_z^2}$. La condition de résonance est vérifiée sur une surface donnée par : $\hbar\omega_{rf} = g_F m_F \mu_B [B(\vec{r}) - B(\vec{0})]$ (la largeur Γ est très faible, si bien qu'on peut considérer une surface pour les besoins du raisonnement). A cause du déplacement, seuls les points du condensat vérifiant cette condition forment la région de couplage, ce qui définit une "calotte" de résonance par l'intersection du volume du condensat et de la surface de résonance. Or les dimensions du condensat dépendent du nombre d'atomes et décroissent avec le temps, donc la surface de la calotte diminue pendant l'évolution jusqu'à 0 : il existe donc une taille critique, donnant un nombre d'atomes critique, pour laquelle il n'y a plus d'intersection entre le volume du condensat et la surface de résonance. Le temps au bout duquel ceci est réalisé est cependant long à l'échelle des expériences que l'on réalise, de l'ordre de la centaine par rapport à la dizaine de millisecondes.

Nous avons également mené une simulation numérique de l' équation de Gross-Pitaevskii couplée (à une seule dimension), afin de vérifier l'existence des différents régimes mentionnés au paragraphe. Le principe du calcul consiste en deux mots en une décomposition de l'opérateur d'évolution en une partie "potentielle", traitée dans l'espace réel et une partie "cinétique" traitée dans l'espace réciproque par un algorithme FFT ([8],[28]).

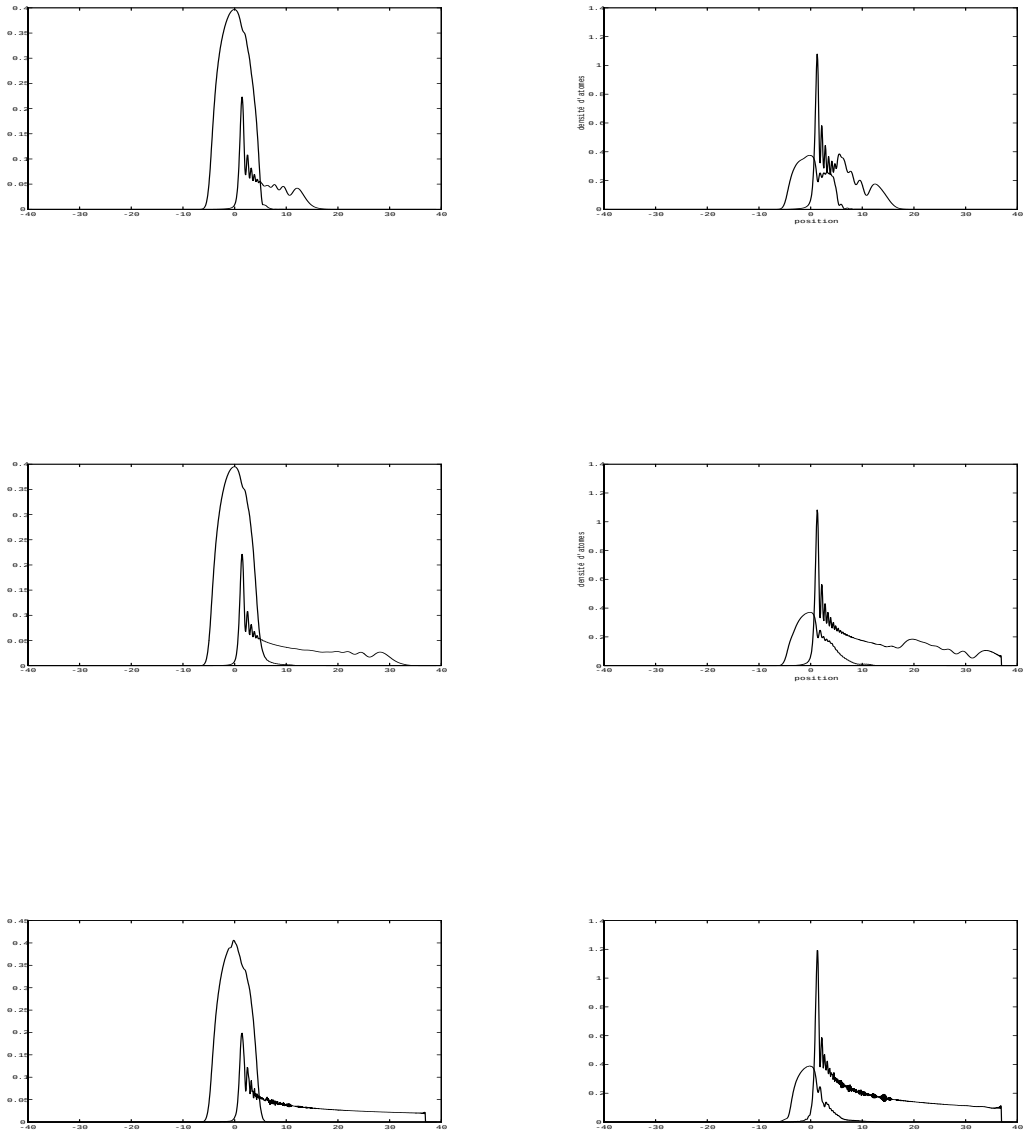

FIG. 2.5 – Evolution des densités atomiques au cours du temps, en fonction de z. L'altitude (en abscisse) est exprimée en unités d'oscillateurs harmonique $\sigma = \sqrt{\hbar/m\omega}$, le module des fonctions d'ondes est porté en ordonnée. La colonne de gauche correspond à une fréquence de Rabi de 100 Hz ($\Omega_{Rf} < \omega_{\text{piege}}$), celle de droite à 300 Hz ($\Omega_{Rf} > \omega_{\text{piege}}$). Le temps croît du haut vers le bas. En descendant, la première image montre des oscillations de relaxation pour $t = 0,9\ ms < \hbar/\Delta^{-1}$. Sur la seconde $t = 2.4\ ms \approx \hbar/\Delta^{-1}$, et les oscillations s'amortissent. Sur la troisième, $\Gamma^{-1} > t = 5\ ms > \hbar/\Delta^{-1}$: le régime stationnaire est établi. Il apparaît bien que dans le cas où $\Omega_{Rf} < \omega_{\text{piege}}$ le condensat est peu affecté, alors que dans l'autre sa structure est modifiée. Les deux calculs sont menés pour un désaccord du coupleur nul et 10^4 atomes.

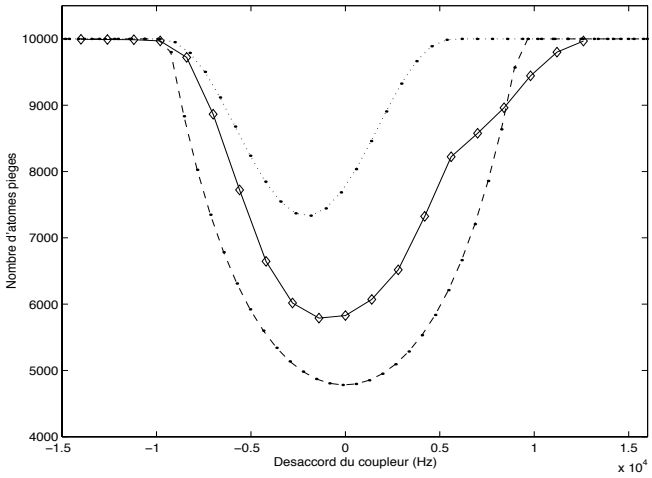

FIG. 2.6 – Largeur de raie du laser à atomes : la courbe supérieure en traits pointillés courts correspond à la formule 3 D, la courbe inférieure en pointillés longs à la formule 1 D, les diamants à une simulation numérique 1 D. La fréquence de Rabi est ici 300 Hz, le désaccord est mesuré par rapport au fond du piège. On a représenté le nombre d'atomes restant dans le condensat après 6 ms de couplage rf, pour 10^4 atomes condensés.

La première série correspond à $\Omega_{Rf} < \omega_{\text{piege}}$ (100 et 180 Hz), et la seconde au cas inverse (300 et 180). Il apparaît que le régime stationnaire arrive toujours à s'établir, mais que la structure du condensat est fortement modifiée dans le second cas.

Nous nous intéressons ensuite à la largeur de raie du laser à atomes, définie comme la largeur de la courbe de résonance obtenue en fixant la puissance rf (donc la fréquence de Rabi) et un temps, et en regardant combien d'atomes restent dans le condensat en fonction de la fréquence du champ rf. La courbe correspondant au calcul 1D est relativement en accord avec la simulation (c'est en fait une sorte de "moyenne"), toutes deux étant plus larges et plus intenses que la courbe 3D. C'est en fait plutôt normal. En effet, cette même simulation a déja été comparée aux données du groupe de Münich ([8]), et il a été constaté que le taux de départ d'atomes obtenu dans un calcul 1 D était plus important que celui mesuré expérimentalement à 3 D, car les densités sont localement plus importantes. Enfin, nous présentons dans un tableau les valeurs de Γ à l'origine (i.e. pour $N = N(0)$) obtenue avec la formule 1D, la formule 3D et mesurée par le groupe de Münich ([21]), ainsi que la comparaison de la courbe à leurs données. L'accord se révèle tout à fait acceptable compte tenu des approximations que nous avons faites pour calculer le taux de départ et de l'imprécision avec laquelle les paramètres expérimentaux sont connus .

$\Gamma_{1D}/\Omega_{rf}^2$	$4,16\ 10^{-5}$
$\Gamma_{3D}/\Omega_{rf}^2$	$1,26\ 10^{-5}$
$\Gamma_{\text{expérimental}}/\Omega_{rf}^2$	$1,2(2)\ 10^{-5}$

TAB. 2.1 – Taux de départ par unité de fréquence de Rabi calculé dans le modèle 1D, 3D et mesuré par le groupe de Münich pour $N_0 = 7.10^5$ atomes, ω_z=180 Hz,ω_x=19 Hz et B_0=2,5 G.

2.5 Interférences entre ondes de matière

A cause des propriétés de grande cohérence que nous avons mentionné dans l'introduction, il devient possible d'étendre au domaine neuf de l'interférométrie atomique les expériences d'interférométrie réalisées en optique traditionnelle. L'utilisation de "laser à atomes" au lieu de jets atomiques "classiques" devrait

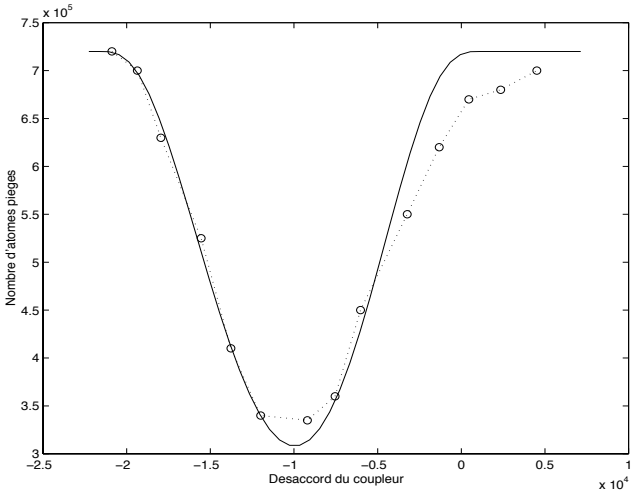

FIG. 2.7 – Largeur de raie du laser à atomes : la courbe supérieure en traits pleins correspond à la formule 3 D, la courbe inférieure matérialisée par les cercles aux données expérimentales du groupe de Münich (publiées dans [8]). On a représenté le nombre d'atomes restant dans le condensat après 20 ms de couplage rf, pour $7,2.10^5$ atomes condensés initialement et une fréquence de Rabi de 312 Hz. Le désaccord est compté par rapport au fond du piège. La fréquence verticale du piège est 127 Hz.

permettre de reproduire, par exemple, un plus grand contraste des franges d'interférences et d'observer d'une manière générale des phénomènes de plus grande ampleur, voire totalement inédits.

2.5.1 Expérience de fentes d'Young

Récemment, le groupe de Münich a réalisé l'analogue d'une expérience de fentes d'Young pour un condensat ([6]). Le principe est très simple : on applique deux champs rf de fréquence différente, qui donnent lieu à l'extraction de deux faisceaux qui se propagent sous l'effet de la gravité. Si on appelle ω_1 et ω_2 les deux fréquences, et si on se restreint à une dimension pour simplifier, chaque faisceau sera décrit par une fonction d'Airy d'énergies respectives E_1, E_2. L'analogie avec les fentes d'Young vient du fait que le couplage est spatialement sélectif : chaque faisceau est extrait d'une zone d'altitude $z_i = -E_i/mg$: la différence d'altitude introduit une différence de marche, et donc des interférences entre les deux fonctions d'onde. Supposons que les faisceaux sont complétement cohérents (en d'autres termes, qu'ils sont entièrement décrits par une fonction d'onde macroscopique). On peut utiliser les résultats du modèle 1D. En appelant $\eta = 2\pi\frac{\hbar\Omega_{rf}}{mgl^{3/2}}\phi_{-1}(z_E)$ le préfacteur des termes fonctionnels, et les deux fréquences ω_1 et ω_2, on peut obtenir la densité totale en sortie :

$$\begin{aligned} \mid \Psi_0(z,t) \mid^2 \approx & \frac{\mid \eta_1 \mid^2}{\mid z+z_1 \mid^{1/2}} + \frac{\mid \eta_2 \mid^2}{\mid z+z_2 \mid^{1/2}} + \\ & + 2\frac{\mid \eta_1\eta_2 \mid}{\mid (z+z_1)(z+z_2) \mid^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3} \mid \xi_1 - \xi_2 \mid^{3/2} + (\omega_1-\omega_2)t\right) \end{aligned} \tag{2.51}$$

Simplifions cette expression en remarquant que les deux énergies finales sont très proches : $\mid z + z_1 \mid^{1/4} = \mid z + z_1 + \frac{\delta E}{mg} \mid^{1/4} \approx \mid z + z_1 \mid^{1/4} (1 - \frac{\delta E}{4mg(z+z_1)})$. La correction est de plus en plus faible quand z augmente : on la néglige. D'autre part, on a dans le même esprit : $\frac{2}{3}(\mid \xi_2 \mid^{3/2} - \mid \xi_1 \mid^{3/2}) \approx (\xi_2 - \xi_1) \mid \xi_1 \mid^{1/2}$, avec $\xi_2 - \xi_1 = \frac{\hbar\Delta\omega}{mgl} = \frac{\Delta z}{l}$. Finalement, il vient l'expression pour l'intensité normalisée du faisceau :

$$\frac{I}{I_0} = \sqrt{\frac{l}{z}}[1 + V\cos\left(\frac{\Delta z}{l}\sqrt{\frac{z}{l}} + \Delta\omega t\right)] \tag{2.52}$$

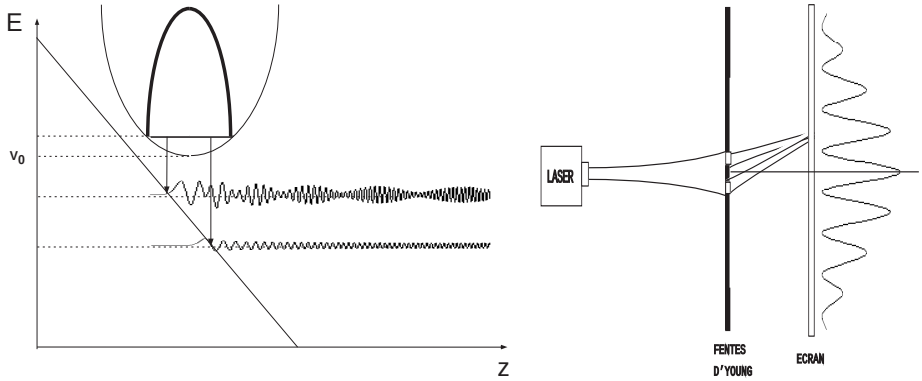

FIG. 2.8 – Expérience du groupe de Münich : deux radiofréquences sont appliquées afin d'extraire deux faisceaux atomiques. En régime de couplage faible, le coupleur est spatialement sélectif (voir texte) et la différence de fréquence détermine une différence de marche entre les faisceaux qui conduit à des battements. C'est l'analogue des fentes d'Young en optique, où un seul faisceau subit un filtrage spatial qui conduit à des interférences.

où on a négligé z_1 devant z. La visibilité est donnée par :

$$v = 2\frac{\mid \phi_{-1}(z_1) \mid\mid \phi_{-1}(z_2) \mid}{\mid \phi_{-1}(z_1) \mid^2 + \mid \phi_{-1}(z_2) \mid^2} \tag{2.53}$$

On a noté $\phi_{-1}(z)$ la fonction d'onde initiale du condensat qui se réduit dans notre cas à une fonction de Thomas-Fermi. La visibilité est proportionnelle à la fonction de corrélation d'ordre 1 du gaz piégé. C'est en fait précisément la mesure qui a été réalisée à Münich. L'étude de la visibilité en fonction de la température a permis de mettre en évidence que la longueur de cohérence du gaz thermique était bien de l'ordre de la longueur d'onde de De Broglie, alors qu'elle est de l'ordre de sa taille pour le condensat.

2.5.2 Battements entre deux lasers indépendants

L'expérience que nous voulons réaliser repose sur le même type d'extraction (rf). Il ne s'agit pas cependant d'introduire une différence de marche entre deux faisceaux issus du même piège, mais de superposer deux faisceaux issus de deux pièges indépendants : on aura alors réalisé l'analogue d'une expérience célèbre due à Mandel, l'observation de battements entre deux lasers indépendants, qui n'est pas possible avec deux sources thermiques indépendantes, qu'elles produisent des photons ou des électrons.

Comment s'y prendre ? Il s'agit d'abord de produire simultanément dans le piège, deux condensats dans deux niveaux hyperfins différents. Dans notre cas, il s'agit des niveaux $\mid F = 1; m_F = -1 >$ et $\mid F = 2; m_F = 2 >$, soumis à un refroidissement sympathique. Brièvement, il s'agit de piéger les deux espèces magnétiquement, dans des proportions très différentes (un rapport de 1 à 100 environ). On refroidit alors évaporativement l'espèce la plus nombreuse, l'espèce minoritaire étant alors thermalisée par suite des collisions élastiques entre les deux gaz. Une fois le seuil de condensation atteint, on peut utiliser deux transitions différentes pour coupler les atomes vers l'état $\mid F = 1; m_F = 0 >$: une transition radiofréquence à quelques MHz pour coupler $\mid F = 1; m_F = -1 >$, et une transition micro-onde vers 6,8 GHz pour $\mid F = 2; m_F = 2 >$. On peut décrire l'interférence par deux fonctions d'Airy, de la même manière que pour le couplage à deux fréquences, avec une relation semblable pour l'interfrange et la visibilité à condition de remplacer $\Delta\omega$ par $\Delta\omega + \frac{V_0 - V_0^{'} + \mu - \mu^{'}}{\hbar}$. La visibilité permet alors de caractériser la fonction de corrélation de deux gaz de Bose indépendants.
Une étude intéressante de la phase relative de deux condensats indépendants est alors possible : on doit observer une phase relative non prédictible d'une expérience sur l'autre, car, si elle est bien définie lors d'une expérience donnée, elle varie aléatoirement sur un ensemble de réalisations statistiques. Chaque réalisation doit donc donner une figure d'interférences décalée et une moyenne statistique du signal

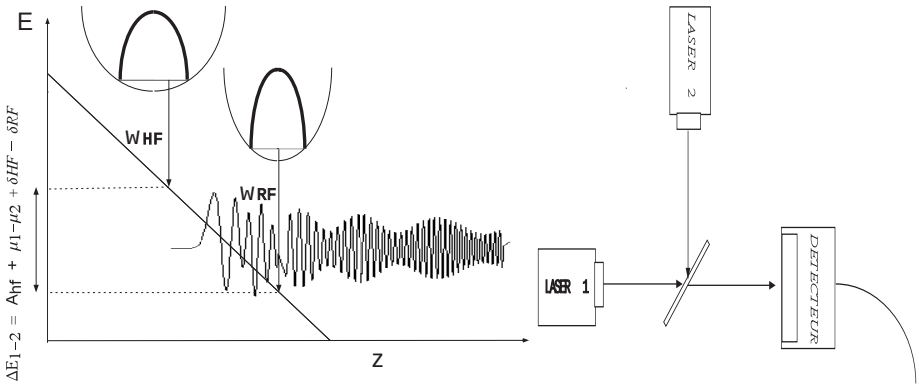

FIG. 2.9 – Battements entre deux lasers à atomes indépendants : comme en optique, le haut degré de cohérence des faisceaux permet d'observer une figure de battements dans la zone de recouvrement spatial des deux faisceaux. La figure n'est cependant pas reproductible d'une réalisation sur l'autre, car la phase relative prend une valeur fixée, mais non prédictible.

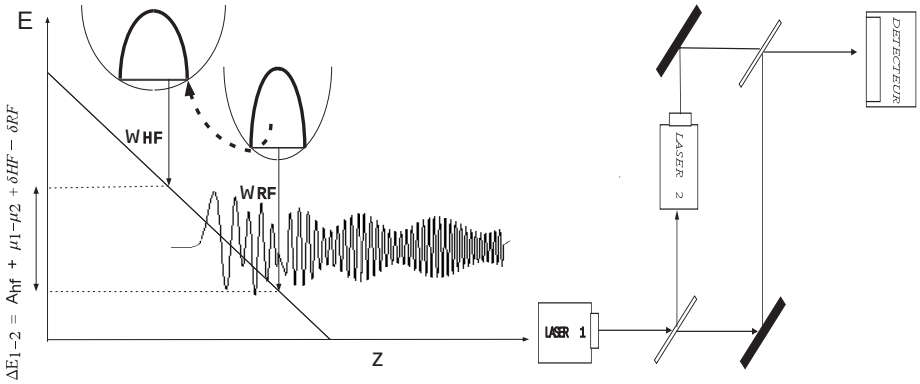

FIG. 2.10 – Battements entre deux lasers à atomes : cette fois le second condensat est produit en transférant une partie du premier par une impulsion micro-onde. On définit ainsi une phase relative qui permet de reproduire la figure d'interférences d'une expérience à l'autre. On peut penser par analogie à une expérience d'optique où on injecterait un laser esclave, en le faisant ensuite battre avec le maître.

d'interférences doit donc faire disparaître les franges. Par contre, on peut également partir d'un condensat dans $\mid F = 1; m_F = -1 >$, appliquer un pulse à 6,8 GHz pour transférer une partie dans $\mid F = 2; m_F = 2 >$. C'est une opération similaire à injecter un laser esclave, et à le faire battre ensuite avec le maître. Dans ce cas, l'impulsion micro-onde a imprimé une phase définie entre les deux condensats et il doit être possible d'observer une figure d'interférences reproductible d'une expérience sur l'autre.

Remarquons que des interférences entre deux condensats produit indépendamment dans un double puits (par refroidissement évaporatif "usuel") ont déjà été observées ([17]) : les franges ne sont cependant obtenues qu'après la coupure du piège et l'expansion ballistique des condensats qui conduit à leur recouvrement, et non de manière quasi-continue. De plus, la seconde expérience n'a pas été réalisée, à cause d'un contrôle insuffisant des paramètres du piège.

Chapitre 3

Expériences préliminaires avec le laser à atomes

3.1 Production du condensat de Bose-Einstein

La technique désormais standard pour obtenir la condensation de Bose-Einstein d'un gaz atomique ultrafroid comporte deux étapes. La première consiste à capturer et refroidir le plus d'atomes possibles dans un piège magnéto-optique (PMO), transféré dans un deuxième temps dans un piège magnétique, où il subit le refroidissement évaporatif qui conduit à la condensation. Nous décrivons ici brièvement ces techniques (voir par exemple [32] pour un traitement plus exhaustif).

3.1.1 Le pré-refroidissement laser

La source initiale d'atomes provient d'un four qui délivre un jet d'atomes chauds (quelques centaines de K). Pour pouvoir capturer ces atomes dans un piège, il est nécessaire de le ralentir en utilisant la pression de radiation d'un laser contre-propageant au jet atomique. Pour un atome à deux niveaux, cette force s'écrit ([26]) :

$$\vec{F} = \hbar\vec{k}\frac{\Gamma}{2}\frac{\Omega_{\text{Rabi}}^2/2}{(\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\Omega_{\text{Rabi}}^2}{2})} \tag{3.1}$$

Dans cette expression, $\vec{k}$ est le vecteur d'onde du champ laser, Γ est la largeur de l'état excité, Ω_{Rabi} est la fréquence de Rabi, qui caractérise le couplage atome-laser, et δ est le désaccord de l'onde laser par rapport à la fréquence de Bohr atomique. Cette force ne peut agir de facon efficace que sur une certaine classe de vitesses dans le jet atomique, centrée sur la résonance corrigée de l'effet Doppler : $\delta^{'} = \delta - \vec{k}.\vec{v}$, et de largeur en énergie $\hbar\Gamma$. La méthode est grandement améliorée en imposant un champ magnétique inhomogène qui décroît le long du jet atomique (ralentisseur Zeeman) : ainsi, l'effet Zeeman maintient les atomes à résonance en compensant la variation de l'effet Doppler due au ralentissement.

Le jet d'atomes, ralenti à une vitesse de quelque m/s, débouche dans un piège magnéto-optique. Ce dernier est constitué de deux faisceaux contre-propageant par direction de l'espace. On ajoute en plus deux bobines en configuration Helmholtz, qui produisent un champ variant linéairement avec z. Dans une dimension, le désaccord à résonance devient $\delta = \omega_{\text{at}} - \omega_{\text{laser}} - kv - g_F m_F B^{'} z$ et la force totale s'obtient en développant (3.1) au premier ordre : $F \sim -\alpha v - \beta z$. Le mouvement de l'atome autour du centre du piège est alors celui d'un oscillateur amorti. L'énergie cinétique moyenne des atomes diminue à cause de l'interaction avec les photons lasers (refroidissement Doppler, puis par gradients de polarisation), aboutissant à des valeurs typiques de quelques dizaines à centaines de microkelvins, selon la densité du gaz. Cette première étape est essentielle, car la profondeur des puits de potentiel magnétique est faible, de l'ordre du mK : des atomes plus chauds n'aurait ainsi aucun mal à s'échapper.

Etape	n (at/cm^3)	T (K)	ρ
Four	10^{12}	130	10^{-14}
Jet	10^6	130	10^{-19}
Zeeman	10^6	1	10^{-14}
PMO	10^{11}	100 μK	10^{-5}
Piège magnétique comprimé	10^{12}	300 μK	10^{-6}
Condensat	10^{13}	200 nK	2.612

TAB. 3.1 – Quelques ordres de grandeur sur la densité atomique n, la température du gaz T et la densité dans l'espace des phases ρ le long du chemin menant à la condensation (tirés de [5]).

3.1.2 Le refroidissement évaporatif

Le nuage d'atomes froids est ensuite transféré dans un piège magnétique, une configuration de champ possédant un minimum. L'énergie potentielle de l'atome, qui porte un moment magnétique $\vec{m} = g_F m_F \mu_B \vec{\sigma}$ est $H = -\vec{m}.\vec{B}$. Suivant le signe de $g_F m_F$, le niveau considéré voit une cuvette de potentiel ou un potentiel répulsif : il existe donc des états atomiques hyperfins piégeants ou anti-piégeants. La configuration de champ la plus utilisée est celle dite de Ioffe-Pritchard, qui, dans la limite où la taille du nuage est faible, est bien approximée par un potentiel harmonique :

$$V_{\text{piege}} = V_0 + \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \tag{3.2}$$

B_0 est le champ dit de biais : il assure que le minimum du champ magnétique n'est pas nul. Cela limite l'existence de transitions de Majorana, qui sont des pertes dues au suivi non-adiabatique du champ par l'atome aux endroits où le champ s'annule. Le nuage magnétiquement piégé est alors soumis au refroidissement évaporatif. Ce procédé consiste en deux mots à enlever les atomes les plus énergétiques de la distribution de vitesse, pour abaisser l'énergie moyenne par atome. Le nuage se thermalise alors à cause des collisions binaires élastiques à une température inférieure . Pour sélectionner l'énergie des atomes évaporés, on impose une rampe radiofréquence qui induit une transition vers un état non-piégeant seulement pour les atomes dont l'énergie, comptée par rapport au fond du puits, vérifie la condition $E - E_0 \geq \hbar\omega_{rf}$ ("évaporation forcée assistée par radiofréquence"). La fréquence finale détermine (entre autres) le nombre d'atomes condensés. Un des paramètres cruciaux est le taux de collisions élastiques, Γ_{el}, qui détermine l'efficacité de l'évaporation : il est en effet important d'évaporer le plus vite possible, afin de ne pas être limité par les divers processus de pertes qui existent dans le piège. Pour cela, il faut atteindre le régime d'emballement, où le taux de collisions augmente brutalement au cours du temps. En optimisant l'ensemble du dispositif pour que ce critère soit satisfait, on arrive en quelques dizaines de secondes au régime dégénéré. Il se manifeste par l'apparition d'un pic étroit de forte densité au centre du nuage thermique, signature d'un condensat de Bose-Einstein.

3.2 Présentation du dispositif

L'équipe BEC de l'Institut d'Optique travaille sur l'atome de Rubidium 87. Comme tous les alcalins, il possède une structure de niveaux relativement simple, qui rend aisée l'utilisation des techniques de piégeage et de refroidissement laser. Une présentation détaillée du dispositif est présentée dans les références ([4],[5]).

3.2.1 Vue d'ensemble

La source d'atomes de Rubidium est un four qui produit un jet thermique dans l'enceinte à vide, amenée à une pression de 10^{-9} mbars environ. Un tube de pompage différentiel relie le four au reste de l'enceinte. Ce jet étant très effusif, il est collimaté quasiment en sortie du four par la pression de radiation d'une mélasse optique bidimensionnelle, ce qui permet d'améliorer le flux d'atomes au niveau du PMO d'un facteur 3 à 6. Ce jet passe ensuite dans un ralentisseur Zeeman pour arriver au niveau de la cellule du

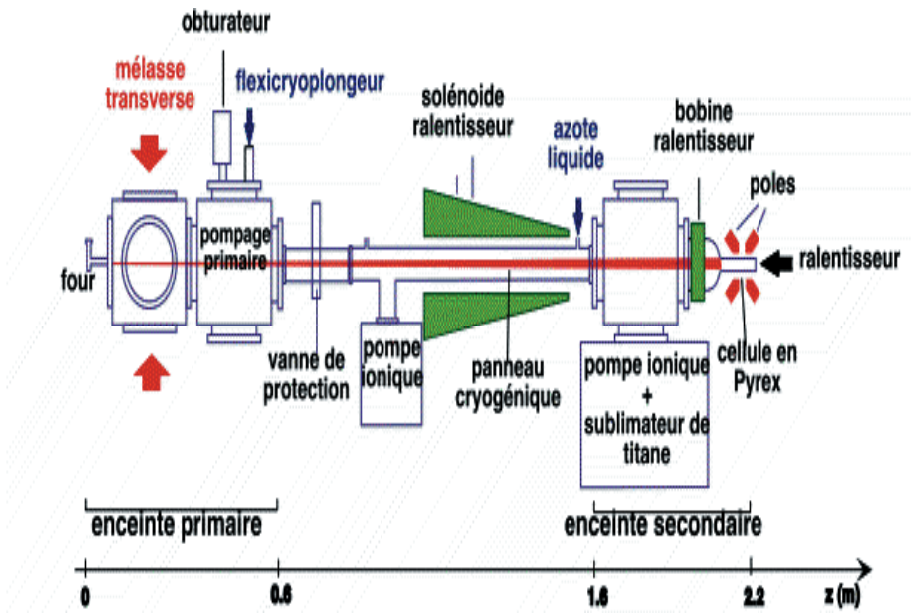

FIG. 3.1 – Vue d'ensemble du dispositif expérimental (issue de [4]).

PMO avec une vitesse moyenne de 5m/s. Le flux d'atomes au niveau du PMO est d'environ 10^9 atomes/s.

En plus des lasers du PMO, réglés sur la transition $F = 2 \rightarrow F^{'} = 3$, un laser repompeur ramène dans F=2 les atomes qui sont accidentellement arrivés dans F=1, où les lasers n'ont quasiment plus d'effet, pour minimiser les pertes d'atomes. Le piège est en fait dans une configuration "Dark SPOT", qui consiste à enlever les faisceaux repompeurs du centre du piège à l'aide d'un cache. Les atomes s'accumulent alors dans F=1, qui est un état noir. On évite ainsi le chauffage dû à la diffusion multiple des photons lasers. Le piégeage reste actif, car dès que les atomes sortent de la "zone d'ombre", il sont repompés dans F=2 et voient de nouveau les lasers. On arrive ainsi à atteindre des densités au centre de 2.10^{11} atomes/cm^3. On applique ensuite une phase de mélasse optique qui refroidit un peu plus le gaz (refroidissement Sysiphe), puis on transfère les atomes par pompage optique dans le niveau hyperfin que l'on veut piéger magnétiquement. Un problème important vient du fait que la cellule du piège est non débouchante. Le flux d'atomes non capturés entraine une pollution des parois par adsorption de Rubidium, la vitesse de pompage dans la cellule étant relativement faible (1 l/s), à cause de son petit volume (7 cm sur 2 cm sur 1cm). Du fait de l'ancienneté de la cellule, les parois sont saturées et on observe régulièrement la formation d'une vapeur dont la densité atteint quelques 10^5 atomes/cm^3. C'est suffisant pour empêcher la formation d'un condensat. Une solution provisoire consiste à chauffer la cellule chaque soir pour pomper les atomes désorbés. A moyen terme, il s'agit de remplacer l'ancienne cellule par une neuve, ce qui devrait résoudre le problème.

3.2.2 Le piège à noyaux ferromagnétiques

Le piège magnétique développé dans le groupe de l'Institut d'Optique est assez original ([1]). En effet, il s'agit d'un électroaimant dont les noyaux ferromagnétiques sont excités par des bobines. Les pôles ferromagnétiques sont configurés de manière à former un champ quadrupolaire (sphérique) dans deux directions et un champ dipolaire compensé dans la troisième. Le champ total est celui d'un piège de Ioffe-Pritchard ([4]).

Les champs créés sont suffisamment importants pour pouvoir travailler à des courants modestes, de quelques ampères. Par comparaison, un piège constitué par des bobines usuelles nécessite des courants de plusieurs centaines d'Ampères et un circuit de refroidissement à eau pressurisée pour évacuer la chaleur

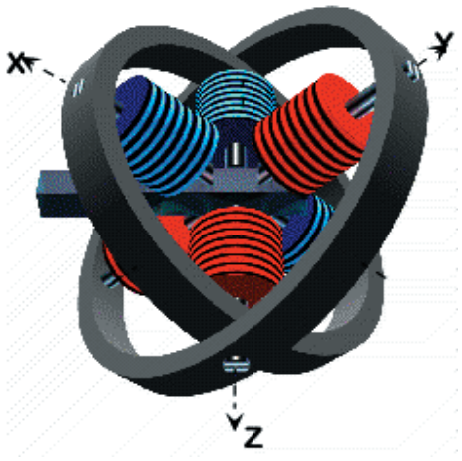

FIG. 3.2 – Schéma de l'électroaimant (issue de [4]).

produite par effet Joule.
Une des particularités de ce système est de pouvoir travailler à des champs de biais de cent à deux cent Gauss, bien supérieurs aux valeurs usuelles obtenues avec des pièges utilisant des bobines, qui valent quelques Gauss. Cela a donné lieu à un certain nombre d'expériences de refroidissement évaporatif en champ fort, dans lesquelles l'effet Zeeman quadratique intervenait ([2],[3]). Cependant, comme nous le verrons plus loin, nous avons baissé le biais pour des questions de stabilité dans les expériences sur le laser à atomes. Nous ne nous attarderons donc pas sur ces questions.
Une fois le piège magnétique chargé, on le comprime, c'est à dire qu'on augmente adiabatiquement sa courbure (en augmentant le courant dans les alimentations). Cela permet d'augmenter significativement le taux de collisions élastiques pour l'évaporation. On applique ensuite une rampe rf qui porte le gaz en dessous du seuil de condensation.
La même antenne joue le rôle du coupleur de sortie, à une fréquence proche de la fréquence finale de la rampe. On utilise une puissance nettement inférieure. La stabilité en fréquence est excellente, puisque le synthétiseur peut délivrer jusqu'à 1 GHz avec une stabilité assurée à mieux que le Hz près.

3.3 Le laser à atomes

3.3.1 Problèmes de stabilité du champ magnétique

Le problème expérimental critique pour obtenir un faisceau continu provient de la stabilité du champ magnétique de biais. En effet, si les fluctuations sont trop importantes, la condition de résonance ne sera pas vérifiée à chaque instant, puisque le désaccord va fluctuer de manière incontrôllée. Il est indispensable de maîtriser ces fluctuations pour pouvoir assurer le fonctionnement continu du laser. Les fluctuations maximales admissibles correspondent environ à la largeur du couplage, c'est-à-dire à la largeur de la fonction $\Gamma(E)$. Nous avons vu que Γ a une demi-largeur donnée approximativement par $mgz_{max} \approx 10kHz$. Cela correspond à une fluctuation du champ $\delta B_0 \approx 2mgz_{max}/\mu_B \approx 1,4510^{-2}$ G. En pratique, on ne peut pas se contenter de cette limite, car une variation du désaccord de 10 kHz est suffisante pour découpler presque totalement le piège. On peut en première approximation admettre une valeur de 1 KHZ, ce qui impose que le champ de biais doit être stable au mG près. Remarquons néammoins que cette limite correspond à des bruits d'intensité sur le laser à atomes qui avoisinent les 10 %, ce qui peut être préjudiciable pour des études quantitatives. Pour un champ de 50 G, Cela correspond à une stabilité relative de $\delta B_0/B_0 \approx 5.10^{-3}$. Plusieurs sources de bruit peuvent être suspectées :

- des fluctuations du courant d'alimentation du piège : les fluctuations correspondantes du champ leur sont proportionnelles : $\delta B_0/B_0 = \delta I/I$. Le groupe de Münich, utilisant un piège plus compact (piège QUIC), a entouré le sytême d'un blindage en μ-métal : cela limite les fluctuations du champ en dessous de 10^{-4} T, assurant une stabilité relative du biais de 10^{-4}. Cette solution est cependant

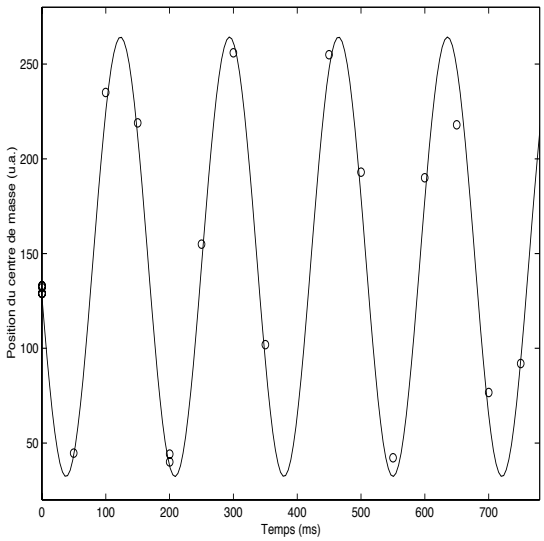

FIG. 3.3 – Oscillation du centre de masse du condensat dans la direction de l'axe faible pendant la décompression de 56 G à 5 G , en fonction du temps après la décompression. Les cercles sont les points expérimentaux, la courbe en traits pleins un fit par $108 \sin(\pi \frac{t-422}{85.4}) + 143,31$, correspondant à une fréquence d'oscillation de 6 Hz environ.

inenvisageable pour l'électroaimant. Néammoins, la stabilité relative (annoncée par le constructeur) de l'alimentation est de 10^{-3}. Il semble donc problématique de descendre en dessous d'une limite acceptable à 50 G.

– des fluctuations thermiques dans le laboratoire ou dans l'électroaimant.

Ainsi, deux séries prises à une demi-heure d'intervalle présente des fluctuations de plusieurs dizaines de kilohertz sur la valeur de la fréquence du coupleur. Délaissant dans un premier temps les problèmes thermiques ([1]), nous nous sommes intéressés aux fluctuations du courant. La solution adoptée en premier lieu a consisté à essayer de baisser le champ de biais pour réduire la fluctuation absolue. Deux stratégies ont été essayées : d'une part baisser le biais à 5 G, puis démarrer le refroidissement évaporatif, d'autre part condenser à 56 G puis baisser le biais. Les deux stratégies n'ont pas permis de stabiliser le condensat. La première n'a pas permis de condenser, probablement parce que et la phase de compression et la rampe rf n'ont jamais été optimisées pour ce biais. La seconde a permis de condenser, mais la phase de diminution du biais ne permet pas au condensat de survivre.

En effet, la courbure sur l'axe fort varie comme l'inverse de B_0, et on a donc tendance à compresser encore plus. Par contre, sur l'axe faible on ouvre le piège en baissant la fréquence, et le condensat est "lâché" dans un piège moins confinant, hors du centre (car le centre est décalé du centre du piège par une quantité g/ω_z^2). On observe ainsi des oscillations non amorties du centre de masse, qui durent jusqu'à la destruction du condensat (dont la durée de vie est d'environ 1 s). Il n'est de plus pas possible de "blinder" le condensat par un bouclier rf, mesure qui augmente sa durée de vie à plusieurs secondes, car le condensat entre de plein fouet dans le "mur" rf pendant l'oscillation et "s'anti-évapore". Pour résoudre ce problème, il faut donc s'orienter vers les solutions suivantes :

– soigner tous les câblages pour éviter les pertes de ligne, les inductances parasites, boucles de masse,etc..
– optimiser le refroidissement évaporatif à faible biais (compression et rampe d'évaporation).
– éventuellement essayer un asservissement en température de l'électroaimant pour limiter l'influence des fluctuations thermiques (ce qui peut être réalisé d'une part en le chauffant par effet Joule, d'autre part en le refroidissant).
– enfin essayer d'améliorer la stabilité intrinsèque du circuit électrique.

[1] problématiques à cause de disfonctionnements de la climatisation du laboratoire.

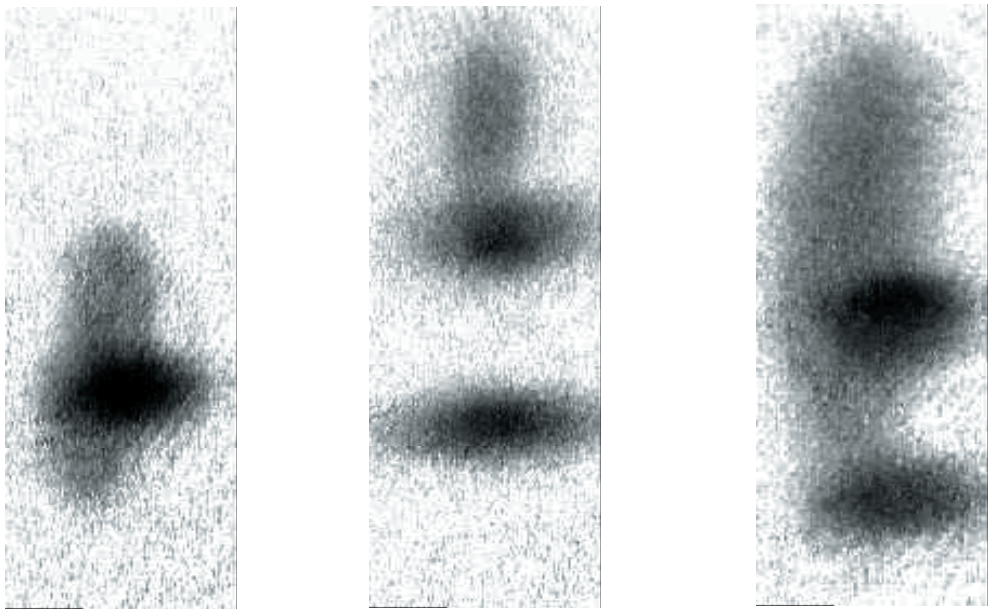

FIG. 3.4 – Lasers à atomes dans $| F = 1; m_F = -1, 0, +1 >$. Le condensat du haut est dans -1, le faisceau dans 0, celui du bas est un "paquet" transféré dans +1. Sur la première, la puissance est plus faible que sur les deux dernières, si bien que seul 0 est peuplé. Le temps d'application de la rf est plus long sur la troisième que sur la deuxième, alors que le temps de vol est le même .

3.3.2 Résultats préliminaires

Nous pouvons tout de même présenter des images de lasers obtenus dans $| F = 1 >$, à relativement forte puissance (correspondant à une fréquence de Rabi de l'ordre du kHz). Le système d'imagerie est assez particulier, en ce sens que le laser sonde se propage presque parallèlement à la verticale, avec une parallaxe de quelques degrés. On voit donc des condensats "confondus". Les images reflètent l'absorption par le condensat de la lumière du laser sonde recueillie sur une caméra CCD. Elles sont prises après un certain temps d'expansion ballistique ("temps de vol") pour éviter les effets de saturation. Un nouveau système est en place à l'heure actuelle, pour nous permettre de détecter les atomes dans un plan vertical et d'évoluer vers l'imagerie par contraste de phase, qui est non destructive et permet donc de prendre un "film" du condensat ([32]). Enfin, il existe un gradient de champ résiduel à la coupure du piège qui permet de séparer spatialement les trois sous-niveaux Zeeman $m_F = +1, 0, -1$ par effet Stern et Gerlach. L'identification des condensats est facilitée par cet effet. Il est à noter que l'état m=+1 est peuplé par couplage à un photon, et non deux. En effet, la puisssance rf est suffisante pour que la zone de couplage soit assez large. Les atomes sont d'abord résonants sur la transition -1 $\rightarrow$ 0, passent dans le faisceau, tombent pour arriver dans une zone où ils sont résonants avec 0 $\rightarrow$ +1 et sont transférés vers l'état anti-piégeant.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce mémoire les caractéristiques esentielles d'un laser à atomes quasi-continu produit par couplage radiofréquence à partir d'un condensat de Bose. Un modèle simple du couplage entre le piège et l'espace libre nous a permis d'en dégager quelques caractéristiques, et d'évaluer en ordre de grandeur l'efficacité du couplage. Nous avons également mentionné quelques expériences d'interférences entre ondes de matière réalisables avec un tel système. Du point de vue théorique, le modèle peut être amélioré grâce à un traitement prenant en compte les effets de température finie sur le couplage ([25]). De nouveaux processus impliquant l'interaction entre les atomes condensés, le nuage thermique et les excitations élémentaires du condensat sont en particulier évoqués. Comme le traitement présenté dans ([25]) se focalise sur le couplage Raman et néglige la gravité, il reste à l'appliquer au coupleur de sortie radiofréquence. Ce calcul ne peut être mené que numériquement. De plus, la source décrite recèle d'autres possibilités intéressantes. L'effet Zeeman quadratique, que nous avons déjà mentionné, a une conséquence curieuse lorsque le champ de biais est suffisamment élevé. Le sous-niveau $\mid F = 2; m_F = 0 >$ devient en effet très légèrement piégeant, formant une cavité très étendue par rapport au piège habituel. Le couplage possible entre cette cavité et le laser permet d'envisager l'élaboration d'interféromètres à ondes de matière, ou bien encore d'observer les modes de cette cavité, qui sont des fonctions d'onde d'oscillateurs harmoniques, avec une population macroscopique.

Pour conclure, je voudrais remercier l'équipe de l'Institut d'Optique pour leur accueil au sein de leur groupe, en particulier Alain Aspect qui m'a proposé ce stage. Je remercie également Philippe Bouyer pour ses explications, ses conseils et son aide pour les calculs informatiques, ainsi que Guillaume Delannoy, Yann Le Coq et Sadiqali Rangwala pour leurs explications patientes sur le délicat fonctionnement du dispositif. Enfin, merci à tous les autres membres du groupe pour leur gentillesse et leur bonne humeur.

Annexe A

Calcul de l'intégrale de recouvrement

A.1 Calcul du taux de départ à 1D

Nous présentons ici le calcul de l'intégrale de recouvrement entre une fonction de Thomas-Fermi décrivant le condensat piégé et une fonction d'Airy décrivant les états libres, dans le cas d'un calcul à une dimension. Nous supposerons que la fonction d'Airy a été normée à 1 :

$$\int A^2.Ai^2(-\frac{z+z_E}{l})dz = 1 \tag{A.1}$$

Nous allons avoir besoin de la transformée de Fourier de Ai. Pour la calculer, cherchons la solution de l'équation de Schrödinger en représentation impulsion :

$$(\frac{p^2}{2m} - i\hbar mg\frac{d}{dp})\phi_E = E\phi_E \tag{A.2}$$

Nous en déduisons les fonctions propres :

$$\phi_E(p) = Be^{i(\frac{pz_E}{\hbar} - \frac{p^3 l^3}{3\hbar^3})} \tag{A.3}$$

où B est un coefficient de normalisation, que nous cherchons à relier à A en revenant en représentation z :

$$< z \mid \phi_E >= \phi_E(z) = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} < z \mid p >< p \mid \phi_E > \tag{A.4}$$

$$= \frac{B\hbar}{l\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{-i(u\xi + \frac{u^3}{3})} \tag{A.5}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} du \cos(u\xi + \frac{u^3}{3}) - i\int_{-\infty}^{+\infty} du \sin(u\xi + \frac{u^3}{3}) \tag{A.6}$$

$$= \frac{B\sqrt{2\pi\hbar}}{l} Ai(-\xi) \tag{A.7}$$

où on a éliminé l'intégrale sur le sinus (intégrale d'une fonction impaire sur un domaine symétrique), et utilisé la représentation intgrale de la fonction d'Airy de première espèce : $\pi Ai(x) = \int_0^{+\infty} du \cos(\frac{u^3}{3} - ux)$. On a alors calculé la forme de la fonction propre dans le potentiel de pesanteur en représentation x, et en identifiant avec la forme normée, on a la relation :

$$B = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}} lA \tag{A.8}$$

Considérons maintenant l'intégrale :

$$I = \int dz A Ai(-\frac{z+z_E}{l})\phi_{TF}(z) = \int dp B e^{-i\frac{pz_E}{\hbar}} e^{i\frac{p^3 l^3}{3\hbar^3}} \tilde{\phi}_{TF}(p) \tag{A.9}$$

On a utilisé la relation de Parseval et noté $\tilde{\phi}_{TF}(p)$ la transformée de Fourier de la fonction de Thomas-Fermi. Dans l'intégrale apparaît le produit d'une fonction oscillante de période $\sim \frac{\hbar}{l}$ et d'une fonction de largeur $\sim \frac{\hbar}{z_{max}}$. (on peut calculer exactement la transformée de Fourier de la fonction de Thomas-Fermi, c'est une fonction de Bessel qui a bien la bonne largeur, si on néglige les lobes latéraux d'intensité très faible devant le lobe principal). Comme $l \approx 0,3\mu m$ et $z_{max} \approx 5\mu m$, on a l'inégalité $\frac{1}{l} \gg \frac{1}{z_{max}}$, et on voit bien que la fonction décroissante tombe à 0 bien avant que la fonction oscillante ne prenne des valeurs significativement différentes de 1. On la remplace donc par 1 dans l'intégrale, ce qui fait apparaître la transformée de Fourier inverse de $\tilde{\phi}_{TF}$ prise au point z_E, soit encore :

$$I \approx B\sqrt{2\pi\hbar}\phi_{TF}(z_E) \approx lA\phi_{TF}(z_E) \tag{A.10}$$

Une approche plus rigoureuse, due à Yvan Castin, consiste à chercher la limite de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda z) Ai(z) dz \tag{A.11}$$

quand λ tend vers 0. L'utilisation du théorème de la convergence dominée permet alors de montrer que la limite est simplement g(0) (Ai est normée à 1). Appliquant ce résultat au problème de l'intégrale de recouvrement, avec $\lambda = \frac{l}{z_{max}}$, on retrouve la même valeur de I.
Les mêmes arguments s'appliquent à la combinaison linéaire ϕ_E définie dans le texte, conduisant à des résultats identiques.

A.2 Calcul du taux de départ à 3D

Nous calculons maintenant le recouvrement entre une fonction de Thomas-Fermi et une fonction d'onde décrivant les atomes couplés vers l'extérieur de la forme :

$$| \psi_0 >=| k_x > \otimes | k_y > \otimes | \phi_E > \tag{A.12}$$

ϕ_E est la fonction propre du potentiel de pesanteur (fonction d'Airy en représentation position), k_x et k_y représentent des ondes planes dans le plan transverse. On considére ici pour simplifier un condensat en forme de "galette" : $x_{max} = y_{max} \neq z_{max}$, avec une fréquence horizontale $\omega = \sqrt{\omega_x \omega_y}$. Commencons par calculer l'élément de matrice :

$$I =< \phi_E \mid \phi_{TF} >= \frac{A}{L}\sqrt{\frac{\mu}{g_{coll}}} \int dxdydz \sqrt{1-(\frac{x}{x_{max}})^2-(\frac{y}{y_{max}})^2-(\frac{z}{z_{max}})^2}\phi_E(-\frac{z+z_E}{l})e^{ik_x x}e^{ik_y y}$$

$$= \frac{A}{L}\sqrt{\frac{\mu}{g_{coll}}} x_{max} y_{max} \int dz \phi_E(-\frac{z+z_E}{l}) \int_0^{\sqrt{1-(\frac{z}{r_{max}})^2}} rdr \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{1-r^2-(\frac{z}{z_{max}})^2} e^{ikr\cos\theta}$$

Appelons J l'intégrale transverse :

$$J = \int_0^{\sqrt{1-(\frac{z}{r_{max}})^2}} rdr \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{1-r^2-(\frac{z}{z_{max}})^2} e^{ikr\cos\theta} \tag{A.13}$$

On utilise ensuite la relation $e^{ix\cos\theta} = J_0(x) + 2\sum_1^\infty J_n(x)e^{in\theta}$. L'intégration sur θ ne laisse que J_0, et on intègre ensuite une fois par parties sur r pour obtenir :

$$J = \frac{2\pi}{3}[(1-(\frac{z}{z_{max}})^2)^{3/2} + \frac{u}{3}\int_0^{\sqrt{1-(\frac{z}{r_{max}})^2}} (1-r^2-(\frac{z}{z_{max}})^2)^{3/2}\frac{d}{dr}J_0(ur)dr] \tag{A.14}$$

avec $u = kr_{max}$. Pour mener le calcul, on doit étendre à 1 les bornes de l'intégrale. Cela revient à négliger z devant r_{max}. Cela revient à considérer que le condensat est un cylindre plat, ce qui signifie que l'on ne

tient pas compte de la courbure de la surface pour z proche de z_{max}. On a donc tendance à surestimer la valeur de l'intégrale, en augmentant son volume. Cependant, comme ces régions correspondent à des densités qui tendent vers 0, on peut penser que leur contribution ne sera pas trop significative. On remplace également $(1 - r^2 - (\frac{z}{z_{max}})^2)^{3/2}$ par $(1 - (\frac{z}{z_{max}})^2)^{3/2}(1 - r^2)^{3/2}$ pour découpler les intégrales, en espérant que cela ne donnera pas une erreur trop importante pour la même raison. Alors on se sert de $\frac{d}{dx}J_0(x) = -J_1(x)$. Ceci mène à la valeur approchée suivante pour J :

$$J = \frac{2\pi}{3}(1 - (\frac{z}{z_{max}})^2)^{3/2}G(u) \tag{A.15}$$

avec $G(u) = 1 + u\int_0^1 (1 - r^2)^{3/2}J_1(ur)dr$. On peut alors intégrer sur z de la même manière qu'à 1 dimension, ce qui donne :

$$V_{fi} = \frac{2\pi Al}{3L}\sqrt{\frac{\mu}{g_{coll}}}x_{max}y_{max}(1 - (\frac{z_E}{z_{max}})^2)^{3/2}G(kr_{max}) \tag{A.16}$$

Par la règle d'or de Fermi, on en déduit la probabilité de transition par unité de temps et de vecteur d'onde suivant x et y :

$$\frac{d^2\Gamma}{dk_x dk_y} = \frac{\pi\hbar\Omega_{rf}^2}{9\pi mg}\frac{\mu x_{max}^2 y_{max}^2}{g_{coll}}(1 - (\frac{z_E}{z_{max}})^2)^3 \mid G(k, r_{max}) \mid^2 \tag{A.17}$$

Pour intégrer suivant les dimensions transverses, on va négliger l'énergie cinétique transverse devant l'énergie suivant z. C'est justifié car elle est de l'ordre d'une fraction du potentiel chimique, qui donne une contribution négligeable à l'énergie totale (de l'ordre du kHz à comparer au MHz). L'intégration sur les vecteurs d'ondes ne concerne alors que l'intégrale de la fonction G qu'on transforme en coordonnées cylindriques :

$$F(k_{max}r_{max}) = \int_0^{k_{max}r_{max}} udud\theta \mid G(u) \mid^2 \tag{A.18}$$

avec $u = kr_{max}$. G se calcule exactement (par Mathematica) :

$$G(u) = 2 + \frac{3u\cos u - 3\sin u}{u^3} \tag{A.19}$$

L'intégrale peut également se calculer et sa valeur doit être prise pour la borne supérieure de l'intégrale sur les vecteurs d'onde. Comme la largeur transverse en impulsion est justement $\hbar/r_{max}$, cette borne peut être approximée simplement par 1, et $F(1) \approx 0,55$ mène à la formule simple :

$$\Gamma \approx 0,55\frac{\pi^2\hbar\Omega_{rf}^2}{9mg}\frac{\mu x_{max}y_{max}}{g_{coll}}max[0, 1 - (\frac{E}{mgz_{max}})^2]^3 \tag{A.20}$$

Bibliographie

[1] B. Desruelle, V. Boyer, P. Bouyer, G. Birkl, M. Lécrivain, F. Alvès, C.I. Westbrook, and A. Aspect. Trapping cold neutral atoms with an ironcore electromagnet. *EPJD*, 1 :255–258, 1998.

[2] B. Desruelle, V. Boyer, S.G. Murdoch, G. Delannoy, P. Bouyer, and A. Aspect. Interrupted evaporative cooling of 87 rb atoms trapped in a high magnetic field. *PRA*, 60 :R1759–R1762, 1999.

[3] P. Bouyer, V. Boyer, G. Delannoy, Y. Le Coq, M. Lécrivain, and A. Aspect. Rf-induced evaporative cooling and bec in a high magnetic field. In A.N. Chester, S. Martelluci, A. Aspect, and M. Inguscio, editors, *Proceedings of the Erice summer school*, 1999.

[4] B.Desruelle. Thèse de doctorat de l'université de paris-sud, 1999.

[5] V.Boyer. Thèse de doctorat de l'université pierre et marie curie-paris 6, 2000.

[6] I.Bloch, T. Esslinger, and T. Hansch. Measurements of the spatial coherence of a trapped bose gas at the phase transition. *Nature*, 403, 2000.

[7] C. Cohen-Tannoudji. Cours au collège de france, 1999-2000.

[8] J. Schneider and A. Schenzle. Output from an atom laser : theory versus experiment. *Applied Physics B*, 69 :353–356, 1999.

[9] L.Landau and E. Lifshitz. *Physique statistique 2*. Mir, 1977.

[10] K. Huang. *Statistical mechanics*. Wiley and sons, 1987.

[11] O.Penrose and L.Onsager. Bose-einstein condensation and liquid helium. *Physical review*, 104 :576, 1956.

[12] C. Cohen-Tannoudji. Cours au collège de france, 1998-1999.

[13] R.J. Glauber. Quantum theory of optical coherence. In S.Kay, editor, *Quantum optics*, 1966.

[14] M. Naraschewski and R.J. Glauber. Spatial coherence and density correlations of trapped bose gases. *PRA*, 59 :4595, 1999.

[15] Y. Castin and J. Dalibard. Relative phase of two bose-einstein condensates. *PRA*, 55 :4330, 1997.

[16] J. Javanainen and S.M. Yoo. Quantum phase of a bose-einstein condensate with an arbitrary number of atoms. *PRL*, 76 :161, 1996.

[17] M. Andrews, C.G. Townsend, H.J. Miesner, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle. Observation of interferences between two bose-einstein condensates. *Science*, 275 :637, 1997.

[18] M.-O. Mewes, M.R. Andrews, D.M. Kurn, D.S. Durfee, C.G. Townsend, and W. Ketterle. Output coupler for bose-einstein condensed atoms. *PRL*, 78 :582, 1997.

[19] B.P. Anderson and M. Kasevich. Macroscopic quantum interferences from atomic tunnel arrays. *Science*, 282 :1686, 1998.

[20] E.W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, J. Wen, K. Helmerson, S.L. Rolston, and W.D. Phillips. A well-collimated quasi continuuous atom laser. *Science*, 283 :1706, 1999.

[21] I. Bloch, T. Esslinger, and T. Hansch. Atom laser with a cw output coupler. *PRL*, 82 :3008, 1999.

[22] R.J. Ballagh, K. Burnett, and T.F. Scott. Theory of an output coupler for bose-einstein condensed atoms. *PRL*, 78 :1607, 1997.

[23] H. Steck, M. Naraschewski, and H. Wallis. Output coupler of a pulsed atom laser. *PRL*, 80 :1, 1998.

[24] Band, P.S. Julienne, and M. Trippenbach. Radio-frequency output coupling of a bose-einstein condensate for atom laser. *PRA*, 59 :3823, 1999.

[25] S. Choi, T. Jappha, and K. Burnett. Adiabatic output coupling of a bose gas at finite temperature, 2000. eprint/cond-mat 0001033.

[26] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Processus d'interactions entre photons et atomes.* CNRS Interéditions, 1988.

[27] C. Fabre, A. Aspect, and G. Grynberg. *Introduction aux lasers et à l'optique quantique.* Ellipses, 1999.

[28] J.Schneider and A. Schenzle. Investigation of a two-mode atom laser, 1999. a paraître dans PRA.

[29] F. Dalfovo, L. Pitaevskii, and S. Stringari. Order parameter at the boundary of a trapped bose gas. *PRA*, 54 :4213, 1996.

[30] G.M. Moy and al. Born and markov approximation for atom lasers. *PRA*, 59 :667, 1999.

[31] M.W. Jack, M. Naraschewski, M.J. Collett, and D.F. Walls. Born and markov approximations for an atomic output coupler. *PRA*, 59, 1999.

[32] W. Ketterle, D.M. Stamper-Kurn, and N.J. Van Druten. Making, probing and understanding bose-einstein condensates. In M. Inguscio, S. Stringari, and C.E. Wieman, editors, *Proceedings of the Enrico Fermi summer school*, 1998.